

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 51. Heft 6.

DER GANZEN REIHE 356. BANDES 6. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 18.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.

(Ausgegeben am 21. Dezember 1916.)

Inhalt.

	Seite
1. H. du Bois. Theorie der Polarmaturen und Feldspulen . . .	577
2. G. Borelius und A. E. Lindh. Elektrischer Widerstand und Thermokraft des kristallinen Wismuts	607
3. C. A. Crommelin und Frh. E. I. Smid. Eine Vergleichung einer Druckwage von Schaffer und Budenberg mit dem offenen Standardmanometer des Physikalischen Instituts in Leiden zwischen 20 und 100 Atmosphären, als Beitrag zur Theorie der Druckwage von S. und B. (Hierzu Tafel III). . .	621
4. E. I. Hoogenboom-Smid. Vergleichung der Druckwage des Van't Hoff-Laboratoriums zu Utrecht mit denen des Van der Waals-Fonds zu Amsterdam	635
5. A. Einstein. Über Friedrich Kottlers Abhandlung „Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation“ . . .	639
6. Adolf Böhi. Verfahren zur Messung der absoluten Potentialdifferenzen, welche beim Kontakt beliebiger Leiter auftreten .	643
7. Paul Caspar. Über die Kreisgebiete im elektromagnetischen Felde eines Hertzschen und eines Abrahamschen Erregers .	649
8. August Buchholz †. Über physikalische Einheitensysteme .	678

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 51.

1. Theorie der Polarmaturen und Feldspulen; von H. du Bois.

[Zweite Mitteilung.¹⁾]

(Aus dem Bosscha-Laboratorium.)

Hauptbezeichnungen (vgl. die Figuren):

<i>A</i>	Elektrische Leistung.	\mathcal{E}	Stromdichte.
<i>B</i>	Oberer Grenzhalmmesser.	\mathfrak{F}	Zugkraft.
<i>C</i>	Konstante.	\mathfrak{S}	Feldintensität.
<i>E</i>	Vollst. ellipt. Integral 2. Gatt.	\mathfrak{I}	Magnetisierung.
<i>K</i>	Vollst. ellipt. Integral 1. Gatt.	\mathfrak{M}	Magnetisches Moment.
<i>I</i>	Stromstärke.	a, b	Halbachsen.
<i>P</i>	Konstante.	m	Achsenverhältnis.
<i>R</i>	Widerstand.	r	Kugelradius.
<i>S</i>	Flächeninhalt.	ξ, η, ζ	Armaturkoordinaten.
2α	Polabstand.	Γ	Gammafunktion.
\bar{b}	Unterer Grenzhalmmesser.	α	Armaturhalbwinkel.
f	Ferromagnetischer Faktor.	β	Stirnhalbwinkel.
j	Querschnittsfaktor.	ε	Zonenwinkel.
k, l, m, n	Exponenten.	$\lambda = \sin^2 \varepsilon / \varepsilon^2$	Abkürzung.
p	Kurvenparameter.	$\mu = m/l, \nu = n/l$	Abkürzungen.
$u = k\mu, v = k\nu$	Abkürzungen.	ϱ, ω	Polarkoordinaten.
$w = B/\bar{b}$	Abkürzung.	σ	Spezifischer Widerstand.
x, y, z	Spulenkoordinaten.	v	Spulenhilbwinkel.

§ 48. Bei zu sättigenden Elektromagneten sollten die erregenden Windungen so nahe wie nur irgend möglich an bzw. um das Interferrum herangelegt werden. Diese Forderung habe ich nach wie vor besonders betont, u. a. auf Grund

1) Erste Mitteilung: Ann. d. Phys. 42. p. 903. 1913, wo folgende Fehler zu berichtigen sind: p. 908: „und führt auf ein elliptisches Integral“ ist zu streichen; p. 940: Das Mittelglied der Gleichung (VI*) soll lauten: $2\xi\sqrt{1-q^2}$; p. 942: Gleichung (III) soll heißen: $\partial^2(d\mathfrak{S}_z)/\partial x^2 = 8\mathfrak{I}\sin^2\alpha \cos 3\alpha d\eta/\eta^2$; Gleichungen (IV) und (V) erhalten ein Minuszeichen; p. 943: in § 39 hat die Wurzel x als letztes Glied:

$$\sqrt{(B+b)^2 + 4\Delta b(\eta^2\alpha - 1)}.$$

Vgl. auch Versl. Akad. Amsterd. 24. p. 698, 1451. 1915.

spezieller Messungen des Hrn. Morris Owen.¹⁾ Im hiesigen Laboratorium ist zu diesem Zweck seit einem Jahrzehnt ein Satz von drei Paar schweren „Sonderpolspulen“ in Gebrauch; zuweilen bildeten diese überhaupt die einzigen erregenden Amperewindungen, wobei das Feld stets über 90 Proz. desjenigen Wertes erreichte, den man bei voller ordnungsmäßiger Erregung erhalten hätte. Zur „Übersättigung“ der Polspitzen tragen sie wesentlich bei, und ihr an und für sich „eisenloses“ Feld superponiert sich dem bereits vorhandenen. Durch koaxiale Angliederung eines solchen Satzes ohne Eisenkern läßt sich nötigenfalls auch eine größere Feldspule aufbauen. Wie l. c. (§ 4) dargelegt, herrscht jetzt auch in der Elektrotechnik das Bestreben vor, die Erregung dem Anker möglichst zu nähern, sofern dessen Zugänglichkeit und Kühlung dadurch nicht allzu sehr erschwert werden.

Diese Einschränkung gilt freilich auch mehr oder weniger bei vielen Laboratoriumsversuchen, so daß in der Praxis die Polspulen allerdings oft im Wege stehen und daher lieber auf sie verzichtet wird. Seitens der Herren Fachgenossen wurde auch meist gerade die Forderung betont, daß der Wattverbrauch zu beschränken sei, da die allerwenigsten Laboratorien in der Lage seien, für einen Einzelapparat eine größere Leistung zu reservieren; solchen Erwägungen entsprang überhaupt der Halbringtyp. Im Hinblick hierauf ist es ferner zu empfehlen, die Stromdichte vom Feldzentrum hinweg abnehmen zu lassen, wie es bei Galvanometern üblich ist, und wie ich es auch bei attraktorischen Magneten angeordnet habe. Im Gegensatz zu einem gleichmäßig magnetisierten Kreise gibt freilich eine derart lokalisierte Erregung eher Anlaß zu Störungen in der Umgebung.

§ 49. Seit einigen Jahren wandten indessen trotz dieser praktischen Einwände französische Physiker ihr Interesse Feldspulen mit riesigem Wattverbrauch zu. Die Abkühlung soll mittels Petroleum, Wasser oder kryogenen Flüssigkeiten erfolgen. Hr. Kamerlingh Onnes bemerkte hierzu, daß die Darstellung eines Liters flüssiger Luft oder Wasserstoff etwa 0,5 bzw. 1,5 Kilowattstunde erfordere und daß etwa 1500 bzw. 700 Liter davon für eine 100-Kilowattspule stündlich

1) H. du Bois, Ann. d. Phys. 42. p. 956. 1913; Zeitschr. f. Instrumentenk. 31. p. 365, 373. 1911; Verh. d. D. Phys. Ges. 15. p. 303. 1913.

verbraucht würden; demnach wäre eine 7,5- bzw. 10,5-fache Leistung für die Abkühlung allein nötig, was recht ungünstig ist. Die eventuelle Verwendung von Überleitern, Zinn, Blei, in flüssigem Helium würde die Frage allerdings in anderem Lichte erscheinen lassen. Hr. Perrin betonte zuerst die Möglichkeit, in dieser Weise Felder von über 100 Kilogauss — freilich mit sehr hohen Kosten — zu erhalten. Hr. Fabry hat darauf die Durchführbarkeit solcher Vorschläge rechnerisch diskutiert, wobei er ausging von seinen 1898 veröffentlichten Berechnungen für Galvanometerspulen; weiter unten (§ 63) wird hiervon noch die Rede sein.¹⁾

Von den Herren Deslandres und Perot wurden dann Versuche in die Wege geleitet, um nicht nur eisenlose Felder darzustellen, sondern Interpolarspulen auch um, ja sogar zwischen den Polen eines sehr gedrungenen magnetischen Kreises anzubringen, wobei freilich das Interferrum größtenteils von Windungen besetzt sein würde.²⁾ Wie von vornherein zu erwarten, wurde die Überlegenheit direkter Kühlung mittels Leitungswasser im Vergleich zu einer komplizierten Petroleumzirkulation erwiesen. Elektrolyse, d. h. Knallgasbildung, wurde bei blanken Kupfer- bzw. Silberleitern in Wasser dadurch auf ein geringes Maß herabgedrückt, daß benachbarte Leiterstrecken nicht mehr als 1,5 Volt Spannungsdifferenz erhielten. Bei dem besten Apparat der genannten Physiker wurde ein blanker Silberstreifen (0,3 mm dick) von zunehmender Breite zu einer Spirale von trapezoidalem Profil aufgerollt, deren überall 0,3 mm weite Zwischenräume das Kühlwasser axial durchfloß. Diese Lösung ist ebenso elegant wie einfach; indessen wird der Raum um das eigentliche Nutzfeld so ziemlich von Eisen, Silber und Wasser eingenommen, wobei sich offenbar viele erhebliche Schwierigkeiten ergeben. Die Stromdichte ist hier umgekehrt proportional dem Radius; jede Windung hat den gleichen Widerstand und entwickelt daher gleiche Joulesche Wärme. Die

1) H. Kamerlingh Onnes, Versl. Akad. Amsterd. 22. p. 150. 1913. J. Perrin, Bull. Séances Soc. Phys. 6. p. 49. 1907. Ch. Fabry, l'Eclair. Electr. 17. p. 133. 1898; Beibl. 23. p. 190. 1899; Journ. d. Phys. (4) 9. p. 129. 1910.

2) H. Deslandres u. A. Perot, Compt. rend. 158. p. 226, 658. 1914; 159. p. 438. 1914.

eisenlose Spirale gab bei 68 Volt und 5 Kiloampere (bzw. 880 Amp./qmm in der inneren Windung) ein Feld von 49,9 Kilogauss für 340 Kilowatt. Aus den l. c. angeführten Zahlen läßt sich die Temperaturerhöhung auf ca. 45° berechnen, der Wert von A/ξ^2 im Mittel auf 0,13 (in Kilowatt/[Kilogauss]²).

§ 50. Im Anschluß an diese Arbeiten veröffentlichte eine Kommission der Pariser Akademie einen ausführlichen Bericht, wobei außer den genannten Forschern die Herren J. Becquerel, A. Cotton und P. Weiss sich beteiligten. Dort werden in eingehendster Weise die Vorzüge und Nachteile dreier Typen von den verschiedensten Gesichtspunkten aus allseitig diskutiert, und zwar 1. der Riesenelektromagnet, 2. die eisenlose Feldspule, 3. die armierte Polspule nach Deslandres und Perot. Schließlich wird betont, daß nur besondere magnetische Forschungslaboratorien für alle einschlägigen Untersuchungen in Betracht kommen, mit einer verfügbaren Leistung von der Ordnung 1000 Kilowatt.¹⁾

Die Erzeugung immer stärkerer magnetischer Felder ist ohne Zweifel für eine Reihe von wichtigen Untersuchungen auf allen Teilgebieten der Physik von großer Bedeutung, wie u. a. von Hrn. Cotton l. c. ausführlich dargelegt wurde. Dabei werden die hier kurz referierten Bestrebungen sehr zu beachten sein, wenn auch die vorgeschlagenen Verfahren außerordentlich hohe Kosten und sonst manche, z. T. noch nicht recht übersehbare Schwierigkeiten bedingen.

Bei der Weiterführung der Theorie der Polarmaturen erscheint es jetzt angezeigt, auch jene Methoden nach jeder Richtung hin zunächst rechnerisch zu diskutieren. Für die eisenlosen Gebilde ist dies vollkommen scharf durchführbar, ohne daß dabei irgend welche besondere Annahme oder wesentliche Vernachlässigung erforderlich wäre. Dagegen soll bei ferromagnetischen Armaturen wieder wie in § 1 und im Abschnitt I und II gleichförmige Magnetisierung vorausgesetzt werden; die in Abschnitt III durchgeführte zweite Annäherung würde sich übrigens auch hier in Rechnung setzen lassen;

1) Mém. Acad. Sc. 53. p. 69. 1914. Die dort ausgesprochene Vermutung des Hrn. P. Weiss, daß ich die Anwendung von Polspulen abgeschafft hätte, dürfte auf einem Mißverständnis beruhen. Im Gegenteil sind solche beschrieben bzw. abgebildet an den vorstehend (§ 48) zitierten Stellen.

die durch „Übersättigung“ bedingten Überschüsse erwiesen sich bei Armaturenpaaren von der Ordnung 10 Proz.

§ 51. Im IV. und V. Abschnitt soll die Erzeugung stärkster Felder diskutiert werden, und zwar in erster Linie ohne besondere Rücksicht auf den Wattverbrauch. Da dieser indessen alsbald, wenigstens für die äußeren Windungslagen, sehr zunimmt, wird zweitens untersucht, wie ein ökonomischer Nutzeffekt, d. h. mit einem Minimum elektrischer Leistung¹⁾, ein möglichst hoher Wert von \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}^2 zu erzielen ist. Schließlich wird auch der Gleichförmigkeitsgrad des Feldes gebührend in Betracht zu ziehen sein.

Bei alledem handelt es sich im folgenden wesentlich um Rundarmaturen. Auf den zweidimensionalen Fall, z. B. die in Abschnitt II besonders besprochenen Zylinder- und Prismenarmaturen, wird jetzt nur gelegentlich hingewiesen, da eine Diskussion hier zwar der Vollständigkeit, vorläufig aber kaum dem praktischen Bedürfnis entsprechen würde.

Zunächst soll nur eine allgemeine Behandlung im Rahmen der Armaturentheorie versucht werden. Vorläufig sind einige Formeln zahlenmäßig näher erläutert; dies kann später zu ihrer konstruktiven Verwertung hinüberleiten, welche die Grundlage einer zu erstrebenden „Starkfeldtechnik“ zu bilden hätte. In dieser Richtung habe ich l. c. einige Vorversuche mitgeteilt, insbesondere betreffs der Verwendung direkt wasserumspülter, hoch belasteter emaillierter Leiter, und behalte mir vor darauf gelegentlich zurückzukommen.

In einer dritten Mitteilung sollen Zugarmaturen und Zugspulen eingehender behandelt werden.

IV. Interpolarspulen.

§ 52. *Maximalfeld.* Man betrachte zunächst eine einzige Windungslage TU und VW (Fig. 10) zwischen zwei ringförmigen Elementarpolzonen (TV und UW) der ferromagnetischen Armaturen, jede mit der „Belegung“ $2\pi\mathfrak{F}d\eta$. Jedes Element $dx dy$ einer solchen Lage umfasse einen einzigen

1) Bei einem x-Pf.-„Krafttarif“ betragen die Kosten für 1000 Kilowatt bereits 10 x Mark stündlich; es verlohnt sich also wohl, die Bedingungen für die günstigste Ausbeute möglichst scharf zu formulieren.

Draht, ein Band oder irgend einen Leiter, dessen rundes, rechteckiges oder sonstiges Profil den Querschnitt $dx dy/j$ habe, wo nun $j (> 1)$ passend als Querschnittsfaktor bezeichnet

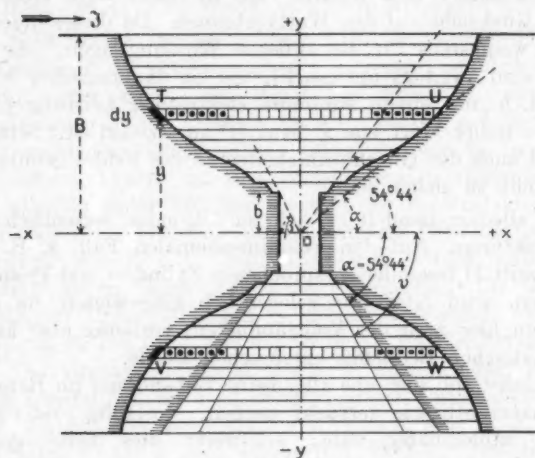


Fig. 10.

wird. Man findet dann durch Zusammenstellung bekannter Beziehungen unter Einführung der Stromdichte \mathfrak{C} für das Gesamtfeld:

$$(37) \quad \begin{cases} d\mathfrak{H} = 4\pi \left(\frac{\mathfrak{J}}{y} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{\mathfrak{C}}{j} \cos \alpha \right) dy \\ = 4\pi \mathfrak{J} \cos \alpha \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{f} \right) \frac{dy}{y}, \end{cases}$$

wo der Kürze halber $\mathfrak{J} j / \mathfrak{C} y = f$ gesetzt ist; letztere Zahl ist wesentlich *positiv*, da man ja den von \mathfrak{J} und \mathfrak{C} herzuleitenden Teilfeldern stets die gleiche Richtung zuweisen wird; man kann sie füglich den „ferromagnetischen Faktor“ nennen. Für den besonderen Fall, daß α und f nicht von y abhängig sein sollten, ergibt die Integration nach y zwischen den Grenzen b und B :

$$X) \quad \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J} \cos \alpha \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{f} \right) \log \frac{B}{b}.$$

Handelt es sich darum, den günstigsten Winkelwert α für die Erzeugung des stärksten Feldes zu ermitteln, so findet man, daß $\cos \alpha (\sin^2 \alpha + 1/f)$ ein Maximum zeigt für

$$(38) \quad \alpha = \arccos \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{f}}{3}}.$$

Für $0 < f < \frac{1}{2}$ wäre $\cos \alpha > 1$; es läßt sich leicht zeigen, daß $\alpha = 0$ alsdann der theoretische Optimalwinkel ist; innerhalb des Bereiches $\frac{1}{2} < f < \infty$ hat man dagegen:

$$\begin{array}{cccccccc} f = 0,5 & 0,75 & 1,0 & 1,5 & 2,0 & 4,0 & 10,0 & \infty \\ \alpha = 0^\circ & 28^\circ 8' & 35^\circ 16' & 41^\circ 49' & 45^\circ & 49^\circ 48' & 52^\circ 44' & 54^\circ 44'. \end{array}$$

Der günstigste Halbwinkel ist demnach offenbar stets kleiner als der bekannte Armaturwinkel $54^\circ 44'$, dem er sich aber nähert, je größer der ferromagnetische Faktor, d. h. eben der Einfluß der Armaturen im Vergleich zur Interpolarspule, wird. Folglich empfiehlt es sich vom rein theoretischen Standpunkte, den ganzen Interpolarraum mit Windungen anzu füllen, wie es in der oberen Hälfte der Fig. 10 dargestellt ist.

Substituiert man jetzt (38) in (37), so erhält man als Maximalwerte:

$$(39) \quad d\mathfrak{H} = \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{f}\right)^{3/2} \frac{d\eta}{\eta},$$

$$(40) \quad \mathfrak{H} = \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} \int_b^B \left(1 + \frac{\mathfrak{G}\eta}{\mathfrak{J}f}\right)^{3/2} \frac{d\eta}{\eta}.$$

§ 53. Man wird nun füglich drei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem die Stromdichte mehr oder weniger mit dem Lagenradius η variiert; weiter unten (§ 63) soll dies näher erläutert werden; \mathfrak{x} und η bedeuten die Koordinaten der Meridiankurve.

1. Unveränderliche Stromdichte \mathfrak{G} wird wohl nur in Betracht kommen, wenn das Spulenvolum nach außen beschränkt ist, dabei größerem Wickelraum die erforderliche Leistung ungeheuer zunimmt; es ergibt sich in diesem Falle:

$$(41) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}f}\eta\right), \quad \mathfrak{x} = \eta \sqrt{\frac{\mathfrak{J}f + \mathfrak{G}\eta}{2\mathfrak{J}f - \mathfrak{G}\eta}}.$$

2. Für den Fall $\mathfrak{C} = C_1/\eta$, nach Hrn. Deslandres und Perot, wird bei konstantem \mathfrak{J} und j der Faktor f ebenfalls unveränderlich, und alle Gleichungen gestalten sich daher durchweg einfacher; man erhält:

$$(42) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{C_1}{\mathfrak{J}j} \right), \quad \varepsilon = \eta \sqrt{\frac{\mathfrak{J}j + C_1}{2\mathfrak{J}j - C_1}}.$$

3. Sollte aber $\mathfrak{C} = C_2/\eta^2$, nach einer in § 64 theoretisch zu begründenden Forderung, so wird schließlich:

$$(43) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{C_2}{\mathfrak{J}j\eta} \right), \quad \varepsilon = \eta \sqrt{\frac{\mathfrak{J}j\eta + C_2}{2\mathfrak{J}j\eta - C_2}}.$$

Im ersten Hauptfall nimmt $\cos \alpha$ zu mit η ; die Armaturen werden demnach konvex. sub 2) dagegen ist $\cos \alpha$ konstant und handelt es sich daher um gerade Kegel; im letzten Falle nimmt $\cos \alpha$ mit steigendem η ab, die Armaturen werden somit anfänglich konkav. Die Kurvengleichungen (41) und (43) lassen sich auch in gewöhnlichen bzw. Polarkoordinaten wie folgt schreiben:

$$(44) \quad \eta(\eta^2 + \varepsilon^2) = -\frac{\mathfrak{J}j}{\mathfrak{C}}(\eta^2 - 2\varepsilon^2), \quad \varrho = \frac{\mathfrak{J}j}{\mathfrak{C}} \frac{3 \cos^2 \omega - 1}{\sin \omega},$$

$$(45) \quad \eta(\eta^2 - 2\varepsilon^2) = -\frac{C_2}{\mathfrak{J}j}(\eta^2 + \varepsilon^2), \quad \varrho = \frac{C_2}{\mathfrak{J}j} \frac{1}{\sin \omega (3 \cos^2 \omega - 1)}.$$

Erstere gehören den nach Hrn. Barisiens Vorschlag als elliptische zu bezeichnenden unikursalen Kurven dritter Ordnung an, letztere den hyperbolischen¹⁾; sie lehnen sich einerseits an das bekannte Folium von Descartes, andererseits an die Trisektrix Mc Laurins an.

Bei der praktisch denkbaren und unter Umständen empfehlenswerten Anordnung, daß man zur Vermeidung übergroßer Erhitzung der inneren Lagen von diesen ausgehend mit 1. konstanter Stromdichte ansetzt und hernach zu 2. und dann zu 3. übergeht, gelangt man offenbar zu einer Gestalt, wie sie in Fig. 10 schematisch abgebildet ist und einer bei älteren Rühmkorffmagneten häufigen Polschuhform zufällig ähnelt. Im wicklungsfreien Innenraum wird $\alpha = 54^\circ 44'$ zu setzen sein.

1) E. N. Barisien, Interméd. d. Mathém. 7. p. 79. 1900.

§ 54. *Prismatische Armaturen.* Hierfür findet man mutatis mutandis bei genügender Länge:

$$(37^*) \quad d\mathfrak{H} = 8\mathfrak{J} \left[\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{f} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \frac{d\eta}{\eta}.$$

Falls α und f unabhängig von η sind, wird

$$(X^*) \quad \mathfrak{H} = 8\mathfrak{J} \left[\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{f} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \log \frac{B}{b}.$$

Der Ausdruck zwischen [] erreicht einen Maximalwert für

$$(38^*) \quad \alpha = \arccos \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{f}}{2}}.$$

Für $0 < f < 1$ wäre wieder $\cos \alpha > 1$ und $\alpha = 0$ anzunehmen; dem Bereich $1 < f < \infty$ entspricht dagegen $0 < \alpha < 45^\circ$. Substituiert man (38*) in (37*), so erhält man als Maximalwerte:

$$(39^*) \quad d\mathfrak{H} = 4\mathfrak{J} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{f^2}} + \frac{1}{f} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{f} \right)} \right\} \right] \frac{d\eta}{\eta}.$$

$$(40^*) \quad \mathfrak{H} = 4\mathfrak{J} \int_b^B \left[\sqrt{\frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}} \right)^2} + \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}} \right)} \right\} \right] d\eta.$$

Die Gleichungen (41), (42), (43) sind so abzuändern, daß in den Nennern unter der Wurzel überall 1 statt 2 zu lesen ist; das gleiche gilt für die cartesischen Gleichungen (44) und (45), während in den polaren Gleichungen statt $3 \cos^2 \omega$ zu setzen ist $2 \cos^2 \omega$.

§ 55. Das irrationale Integral (40) ergibt für die genannten drei Hauptfälle, wenn man abgekürzt

$$\sqrt{1 + \mathfrak{G}b/\mathfrak{J}} = \gamma_b \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \mathfrak{G}B/\mathfrak{J}} = \gamma_B$$

setzt:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H} = \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} & \left[\frac{2}{3} \left\{ \left(4 + \frac{\mathfrak{G}B}{\mathfrak{J}} \right) \gamma_B - \left(4 + \frac{\mathfrak{G}b}{\mathfrak{J}} \right) \gamma_b \right\} \right. \\ & \left. + \log \frac{(\gamma_B - 1)(\gamma_b + 1)}{(\gamma_B + 1)(\gamma_b - 1)} \right]; \end{aligned} \right.$$

$$(47) \quad \mathfrak{S} = \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{C_1^2}{\mathfrak{J}^2}} \log \frac{B}{b};$$

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} \left[\frac{2}{3} \left(4 + \frac{C_2}{\mathfrak{J}b} \right) V_b' - \left(4 + \frac{C_2}{\mathfrak{J}B} \right) V_B' \right] \\ &\quad + \log \frac{(V_b' - 1)(V_B' + 1)}{(V_b' + 1)(V_B' - 1)} \end{aligned} \right\};$$

worin

$$\sqrt{1 + C_2/\mathfrak{J}b} = V_b' \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + C_2/\mathfrak{J}B} = V_B'$$

gesetzt ist. Falls \mathfrak{C} bzw. C_1 oder C_2 schwindet, gehen sämtliche Gleichungen über in

$$\mathfrak{S} = \frac{8\pi\mathfrak{J}}{3\sqrt{3}} \log \frac{B}{b},$$

welche identisch ist mit Gleichung (7) (§ 5) für $\alpha = 54^\circ 44'$.

Für eine einzelne Windungslage der Interpolarspule, deren komplementärer Halbwinkel v sei (Fig. 10, untere Hälfte), beträgt die elektrische Teilleistung, wie § 60 nachzuweisen:

$$(49) \quad dA = \frac{2\pi\sigma\mathfrak{C}^2 y^2 dy}{j} \int_v^{\pi-v} \frac{dv}{\sin^2 v} = \frac{4\pi\sigma \cot v}{j} \mathfrak{C}^2 y^2 dy.$$

Da diese, von der üblichen Anordnung freilich etwas abweichende Erregung in den meisten Fällen weitaus genügt, möge die etwaigen sonstigen Amperewindungen entsprechende Stromenergie hiergegen vernachlässigt werden. Bisher wurde auf den Nutzeffekt keinerlei Rücksicht genommen und behufs Erhaltung eines möglichst starken Feldes der verfügbare Raum ganz vollgewickelt gedacht, derart, daß $v = \alpha$ (Fig. 10, obere Hälfte); für den Optimalwinkel

$$v = \alpha = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 1/f)} = \operatorname{arccot} \sqrt{(\mathfrak{J}j + \mathfrak{C}y)/(2\mathfrak{J}j - \mathfrak{C}y)}$$

wird dann obige Leistung für die ganze Spule:

$$(50) \quad A = \frac{4\pi\sigma}{j} \int_b^B \mathfrak{C}^2 y^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{J}j + \mathfrak{C}y}{2\mathfrak{J}j - \mathfrak{C}y}} dy.$$

Für die drei Hauptfälle ergibt dies abgekürzt:

$$(51) \quad A = \frac{4\pi\sigma\mathfrak{C}^2}{j} \int_b^B \frac{ky^2 + y^4}{\sqrt{2k^2 + ky - y^2}} dy \quad \left[k = \frac{\mathfrak{C}j}{\mathfrak{C}} \right].$$

$$(52) \quad A = \frac{4\pi\sigma\mathfrak{C}^2}{j} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}j + \mathfrak{C}_1}{2\mathfrak{C}j - \mathfrak{C}_1}} (B - b).$$

$$(53) \quad A = \frac{4\pi\sigma\mathfrak{C}^2}{j} \int_b^B \frac{y + l}{y^2 \sqrt{-l^2 + ly + 2y^2}} dy \quad \left[l = \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}j} \right].$$

Die irrationalen Integrale (51) und (53) seien in dieser Form belassen, da sie zu recht komplizierten Ausdrücken führen.

§ 56. *Wirkungsgrad.* Bildet man jetzt für eine Windungslage das Verhältnis des erzeugten Teilfeldes (37)

$$d\mathfrak{H} = 4\pi \left(\frac{\mathfrak{C}}{y} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{\mathfrak{C}}{i} \cos v \right) dy$$

zur erforderlichen Teilleistung dA (49), so findet man den Nutzeffekt:

$$(54) \quad \frac{d\mathfrak{H}}{dA} = \frac{f \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} v + \sin v}{\sigma y^2 \mathfrak{C}},$$

welcher die Stromdichte im Nenner enthält und dem „spezi-fischen Feld“ (pro Watt, § 60) entspricht. Die elektromagnetische Energie des Feldes ist indessen seinem Quadrat proportional; das gleiche gilt für die meisten Vorgänge, deren Erforschung bei der Darstellung äußerst starker Felder den Hauptzweck bildet. Betrachtet man dementsprechend als „Wirkungsgrad“ den Quotient aus $(d\mathfrak{H})^2$ und dA , so ergibt sich hierfür:

$$(55) \quad \frac{(d\mathfrak{H})^2}{dA} = \frac{4\pi \operatorname{tg} v (f \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos v)^2 dy}{\sigma j y^2}.$$

Dieser Bruch enthält die Stromdichte nicht mehr; um für die betrachtete Windungslage eine möglichst ökonomische Ausnutzung der Leistung zu erreichen, wird man die Halbwinkel α und v so zu bemessen haben, daß der Zähler einen möglichst großen Wert erhält, wobei aber $d\mathfrak{H}$ und dA prak-

tisch nicht zu gering werden dürfen. Dazu sei zunächst einmal das gewöhnliche Optimum des Armaturchalbwinkels:

$$\alpha_0 = 54^\circ 44' = \arcsin \sqrt{\frac{3}{4}} = \arccos \sqrt{\frac{1}{4}}$$

angenommen; es wird $\sin^2 \alpha \cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{27}}$ und obiger Zähler, abgesehen vom Faktor $4\pi dy$, wird $\operatorname{tg} v (f \sqrt{\frac{4}{27}} + \cos v)^2$. Differenzierung nach v führt dann zu folgender Bedingung für Maxima oder Minima:

$$f^2 + \sqrt{27} \cos^3 v \cdot f + \frac{27}{2} \cos^4 v - \frac{27}{4} \cos^2 v = 0,$$

mit den beiden Wurzeln

$$f = -\frac{3}{2} \sqrt{3} \cos v$$

und

$$f = -\frac{3}{2} \sqrt{3} (2 \cos^3 v - \cos v) = -\frac{3}{2} \sqrt{3} \cos v \cos 2v;$$

so daß man die Gleichung auch schreiben kann:

$$\left(f + \frac{3}{2} \sqrt{3} \cos v\right) \left(f + \frac{3}{2} \sqrt{3} (2 \cos^3 v - \cos v)\right) = 0.$$

Der erste Faktor entspricht nur negativen Werten von $\cos v$, die weiter nicht in Betracht kommen. Die durch den zweiten Faktor dargestellte einfache kubische Gleichung hat für $0 < f < \sqrt{\frac{1}{2}}$ zwei positive Wurzeln, die mittels der Cardanischen Formeln zu berechnen sind. Die entsprechenden v -Werte bestimmen ein Maximum und ein Minimum. Für $f = 0$ liegt ein Maximum bei $v = 45^\circ$; für $f = \sqrt{\frac{1}{2}}$ handelt es sich um zwei gleiche positive Wurzeln, die einen Wendepunkt bei $v = \arccos \sqrt{\frac{1}{2}} = 65^\circ 54'$ bestimmen.

§ 57. Im Bereiche $0 < f < \frac{1}{2}$ würde das Maximum bei $45^\circ < v < 54^\circ 44'$ liegen und demnach Spule und Armatur gegenseitig übergreifen. Hier wird man also $v = \alpha$ setzen und alsdann nach dem Maximum von $\sin \alpha \cos \alpha (f \sin^2 \alpha + 1)^2$ fragen; dafür findet man als Bedingungsgleichung:

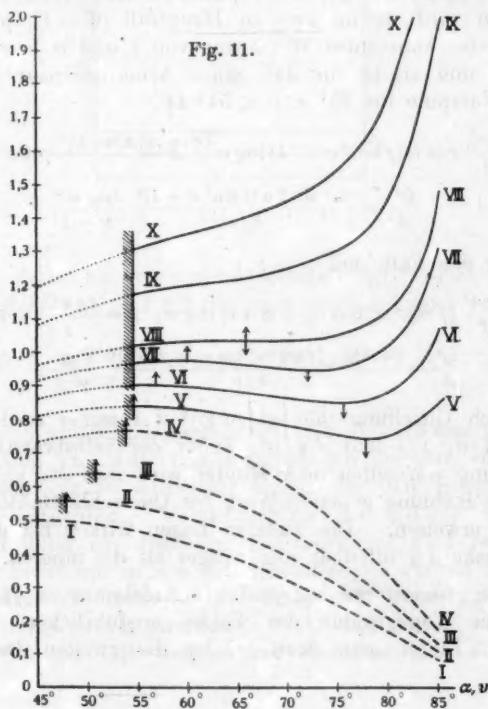
$$6f^2 (\sin^2 \alpha)^3 - (5f^2 - 8f) (\sin^2 \alpha)^2 - (6f - 2) \sin^2 \alpha - 1 = 0.$$

Dieser nach f quadratischen, nach $\sin^2 \alpha$ kubischen Gleichung genügen u. a. die zusammengehörigen positiven Werte I–IV von f und $\sin^2 \alpha$ bzw. $\cos^2 \alpha$ in Tab. 5. Darunter

Tabelle 5.

Nr.	$f = \frac{3j}{\mathfrak{E}y}$	Maximum			Minimum	
		$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	α	$\cos^2 v$	v
I	0	0,5000	0,5000	45°	—	—
II	0,1070	0,5500	0,4500	47° 52'	—	—
III	0,2381	0,6000	0,4000	50° 46'	—	—
IV	0,4153	0,6500	0,3500	53° 44'	—	—
V	$\sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5000$	0,6667	0,3333	54° 44'	0,0447	77° 48'
VI	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{10}} = 0,5692$	0,7000	0,3000	56° 47'	0,0627	75° 30'
VII	$\frac{3}{8}\sqrt{3} = 0,6495$	0,7500	0,2500	60°	0,0955	72°
VIII	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$	0,8333	0,1667	65° 54'	0,1667	65° 54'
IX	$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,8660$	—	—	—	—	—
X	$\sqrt{1} = 1,0000$	—	—	—	—	—

$\sin^2 v$	$\cos^2 v$	v	$\cos^2 v$	v



sind dann weitere Werte V—X angeführt unter obiger Voraussetzung, daß $\alpha_0 = 54^\circ 44'$ bleibt; für $f > \sqrt{\frac{1}{2}}$ gibt es kein Maximum und Minimum mehr. In Fig. 11 sind diese Verhältnisse übersichtlich zusammengestellt. Die gestrichelten Kurven I—IV stellen $\sin \alpha \cos \alpha (f \sin^2 \alpha + 1)^2$ dar als Funktion von α ; die ausgezogenen V—X dagegen $\operatorname{tg} v (f \sqrt{\frac{4}{27}} + \cos v)^2$ in Beziehung zu v . Mit den hierdurch gegebenen Hilfsmitteln kann man nun die günstigsten Werte von α und v für jede Windungslage je nach den vorgegebenen Bestimmungstücken ermitteln. Diese nehmen auch hier mit dem Werte des Faktors f zu, wie es oben (§ 53) der Fall war; in der Praxis dürfte meistens $f > \frac{1}{4}$ sein; das betreffs Konvexität bzw. Konkavität der Armaturen Bemerkte, gilt mutatis mutandis ebenfalls.

Die Integration von (37) und (49) kann nunmehr im ersten und dritten Hauptfall nur graphisch erfolgen, nachdem zusammengehörige Werte von f und α bzw. v eingesetzt sind. Dagegen wird sie im zweiten Hauptfall ($\mathbb{C} = C_1/y$) für ein bestimmtes konstantes Wertepaar von f und α bzw. v recht einfach und ergibt für das ganze Armaturenpaar samt der Interpolarspule für $45^\circ < \alpha < 54^\circ 44'$:

$$\mathfrak{S} = \frac{4\pi C_1}{j} \cos \alpha (f \sin^2 \alpha + 1) \log w, \quad A = \frac{4\pi \sigma C_1^2}{j} \cot \alpha \cdot (B - b),$$

$$\frac{\mathfrak{S}^2}{A} = \frac{2\pi \sin 2\alpha (f \sin^2 \alpha + 1)^2}{\sigma j b} \frac{(\log w)^2}{w - 1}$$

und für den Fall, daß $v > \alpha_0$:

$$\mathfrak{S} = \frac{4\pi C_1}{j} (f \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 + \cos v) \log w, \quad A = \frac{4\pi \sigma C_1^2}{j} \cot v \cdot (B - b),$$

$$(56) \quad \frac{\mathfrak{S}^2}{A} = \frac{4\pi \operatorname{tg} v (f \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 + \cos v)^2}{\sigma j b} \frac{(\log w)^2}{w - 1}.$$

Nach Gleichung (55) ist $(d\mathfrak{S})^2/dA$ ferner noch proportional $1/\sigma$, $1/j$ und dy/y^2 ; außer der selbstverständlichen Benutzung von Silber oder Kupfer wird sich der kleinste genügende Kühlung gebende Wert des Querschnittsfaktors j vorteilhaft erweisen. Die äußeren Lagen wirken bei gegebener Lagendicke dy offenbar ungünstiger als die inneren.

§ 58. *Gleichförmigkeitsgrad.* In Anlehnung an §§ 7, 8 soll auch die Topographie des Feldes ausführlicher diskutiert werden. Bildet man dazu wieder die zweiten Derivierten

nach den Koordinaten, so findet man zunächst im Mittelpunkt einer einzigen Windungslage, da $\partial \alpha / \partial x = \sin^2 \alpha / y$:

$$(57) \quad \frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_3)}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_3)}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_3)}{\partial x^2} = -\frac{12\pi\mathfrak{G}}{jy^2} \sin^4 \alpha \cos \alpha dy.$$

Das Spulenfeld \mathfrak{H}_3 besitzt nach der Längsrichtung (Quer- richtung) in der Mitte stets ein Maximum (bzw. Minimum) wegen des für $0 < \alpha < \pi/2$ durchweg negativen Wertes von $-\sin^4 \alpha \cos \alpha$; dieser ist numerisch am größten für $\alpha = \text{aretg } \sqrt{4} = 63^\circ 26'$ und schwindet nur für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$. Denkt man sich eine solche solenoidische Windungslage an beiden Enden von je einer ferromagnetischen Stirnfläche abgeschlossen

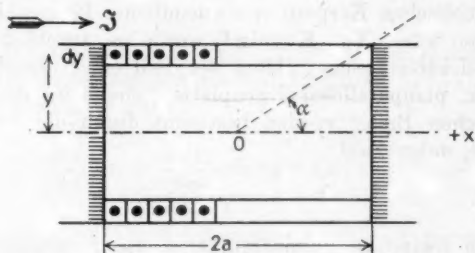


Fig. 12.

(Fig. 12), dann hat man infolgedessen nach Gleichung (8) (§ 6) ein Feld $d\mathfrak{H}_1 = 4\pi\mathfrak{G} \sin \alpha$ und nach Gleichung (9):

$$\frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_1)}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_1)}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 (d\mathfrak{H}_1)}{\partial x^2} = \frac{12\pi\mathfrak{G}}{y^2} \sin^4 \alpha \cos \alpha,$$

entsprechend einem Längsminimum und Quermaximum. Bei Superposition von $d\mathfrak{H}_1$ und $d\mathfrak{H}_3$ werden die zweiten Derivierten sich gerade aufheben, sofern die den Stirnflächen irgendwie eingeprägte Magnetisierung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G} dy/j$ beträgt. Man wird dann ein durchweg gleichförmiges Feld erhalten, und zwar nicht nur in der Mitte, sondern im ganzen Spulenbereich, wie sich leicht für die Endpunkte sowie für jeden inneren Achsenpunkt nachweisen läßt, und damit auch für seitliche Punkte. Allgemeiner und einfacher läßt sich dies

aus einer Betrachtung der den einzelnen Kreisleitern äquivalenten magnetischen Schalen herleiten; deren Stärke beträgt:

$$\oint dx = I = \frac{\mathfrak{C}}{j} dx dy.$$

Bei dem oben angenommenen Werte $\oint = \mathfrak{C} dy/j$ für die Stirnflächen werden also die „Endelemente“ der aufgestapelten Schalen wieder gerade kompensiert. Man hat dann nur mit einer gleichmäßigen magnetischen Potentialzunahme $4\pi In$ zu rechnen, die einem durchweg gleichförmigen Felde $4\pi In/2a$ entspricht; n und $2a$ bedeuten dabei Windungszahl und Länge der betrachteten Lage.

Ganz von selbst würde sich der gewünschte Zustand einstellen, wenn das Solenoid zwischen zwei halbumendlichen ferromagnetischen Körpern von unendlicher Permeabilität eingeschlossen wäre. Von Kelvin¹⁾ wurde im Anschluß an seine Theorie elektrostatischer Bilder der Fall einer unendlich ausgedehnten planparallelen Eisenplatte behandelt; die fiktiven magnetischen Bilder werden bestimmt durch die zwischen 0 und 1 liegenden Zahl:

$$1 - \lambda = \frac{4\pi\kappa}{1 + 4\pi\kappa},$$

wo λ die reziproke Permeabilität, κ die Suszeptibilität bezeichnet. Hier liegt gewissermaßen der umgekehrte Fall einer Luftplatte ($\lambda = 1$) im Eisenraum ($\lambda = 0$) vor.

§ 59. Es ergibt sich eine unendliche Reihe einfacher und multipler magnetischer Bilder des Solenoids, eine Vorstellung, von der Hr. Weiss²⁾ für einen anderen Zweck Gebrauch gemacht hat. Das Feld beträgt im ganzen Solenoid unter diesen Umständen $\oint_s = 4\pi \mathfrak{C} dy/j$, die Magnetisierung der Endflächen $\oint = \mathfrak{C} dy/j$. Bei mehreren konzentrischen Solenoiden werden sich die Ausgleichswirkungen theoretisch superponieren. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit der gegenseitigen Uniformierung eines Spulenfeldes — etwa unterhalb 20 Kilogauss — und derjenigen der ebenen Stirnflächen eines magnetischen Kreises von hoher Permeabilität, wobei also ein merklicher

1) W. Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 1. p. 83. 1846. Repr. Pap. El. and Magn. 2. Ed. p. 104. 1884.

2) P. Weiss, Journ. d. Phys. (4) 9. p. 376. 1910.

magnetischer Widerstand, geschweige denn Sättigung, ausgeschlossen bleiben mögen.

Bei einer Konfiguration wie in Fig. 10 ist zu unterscheiden: Erstens das Teilfeld \mathfrak{H}_1 der Stirnfläche, für welches nach Gleichung (9):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} = \frac{12 \pi \mathfrak{J}}{b^2} \sin^4 \beta \cos \beta.$$

Nimmt man zweitens der Einfachheit halber konische Armaturen an, so hat man für deren Teilfeld \mathfrak{H}_2 nach Gleichung (10) (§ 7):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial x^2} = \frac{6 \pi \mathfrak{J}}{b^2} \sin^4 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 3) \left(1 - \frac{1}{w^2}\right).$$

Drittens kommt das Feld \mathfrak{H}_3 der trapezoidalen Spule in Betracht; im einfachsten zweiten Hauptfall ($\mathfrak{C} = C_1/h$) ergibt die Integration von (57):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_3}{\partial x^2} = - \frac{6 \pi C_1}{b^2 f} \sin^4 \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{w^2}\right).$$

Meistens ist Vernachlässigung von $1/w^2$ gegen Eins zulässig und erhält man dann schließlich:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3)}{\partial x^2} &= \frac{6 \pi \mathfrak{J}}{b^2} \left[2 \sin^4 \beta \cos \beta \right. \\ &\quad \left. + \sin^4 \alpha \cos \alpha \left(5 \cos^2 \alpha - 3 - \frac{1}{f} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Sofern α und f vorgegeben sind, kann man durch einen gewissen Wert von β den Ausdruck zwischen [] zum Schwinden bringen, d. h. durch richtige Bemessung des Vorsprunges der Stirnflächen die Uniformität des Feldes erreichen (§ 8). Falls bei konvexen oder konkaven Armaturen α und f variabel sind, wird dieses Ziel auf dem angedeuteten Wege ebenfalls zu erreichen sein, wenn auch in komplizierterer Weise. Es verlohnt sich kaum, hierauf im allgemeinen einzugehen, da sich die Uniformität leicht empirisch beherrschen läßt durch verschiebbare Kerne, deren Vorsprung sich somit beliebig einstellen läßt.

V. Eisenlose Feldspulen.

§ 60. *Multiplikatrikurven.* Zunächst seien, auch im Hinblick auf später folgende allgemeinere Betrachtungen einige Beziehungen im Zusammenhang dargestellt, die zwar teilweise bekannt, gelegentlich aber auch mißverstanden sind. Das axiale Feld eines Kreisleiters (Fig. 13 A) beträgt, wenn der Sinn des Stromes positiv bezüglich der $+x$ -Achse ist:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 \mathfrak{F}_3 &= 2 \pi I \frac{y^2}{\varrho^3} = 2 \pi I \frac{\sin^3 \omega}{\varrho} = \frac{2 \pi \mathfrak{G}}{j} \sin^3 \omega \, dx \frac{dy}{y} \\ &= \frac{2 \pi \mathfrak{G}}{j} \sin^3 \omega \, d\omega \, d\varrho. \end{aligned} \right.$$

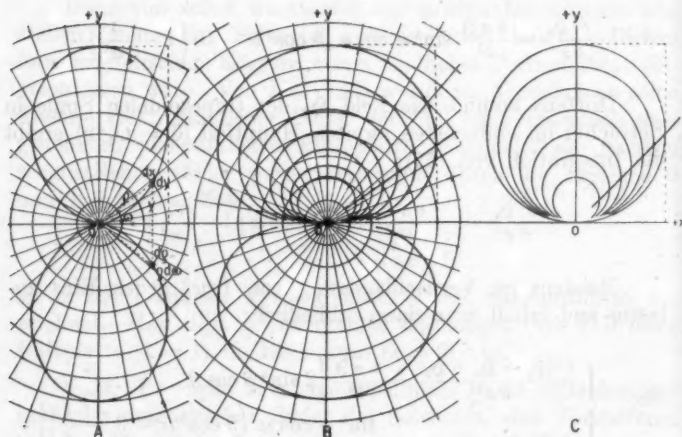


Fig. 13.

Der zweite Ausdruck liefert nun ohne weiteres den geometrischen Ort der coaxialen Kreisleiter gegebener Stromstärke, welche im Ursprung 0 einen bestimmten Feldwert erzeugen. Seine Spur in der meridionalen Bildebene ist das doppelteiförmige *Bioval* (Volkmanns *B-Kurve*) (Fig. 13 A):

$$(XIA) \quad \varrho = p \sin^2 \omega; \quad (x^2 + y^2)^3 - p^2 y^4 = 0.$$

Die Masse des Kreisleiters beträgt offenbar, wenn D die Dichte bezeichnet:

$$d^3 M = \frac{2 \pi D}{j} dx \cdot y \, dy = \frac{2 \pi D}{j} \sin \omega \, d\omega \cdot \varrho^2 \, d\varrho,$$

und die in ihm verbrauchte elektrische Leistung:

$$(60) \left\{ \begin{aligned} d^2 A = I^2 d^2 R &= \frac{2\pi \sigma j I^2}{dx dy} \varrho \sin \omega = \frac{2\pi \sigma \mathfrak{E}^2}{j} dx \cdot y dy \\ &= \frac{2\pi \sigma \mathfrak{E}^2}{j} \sin \omega d\omega \cdot \varrho^2 d\varrho = \frac{2\pi \sigma \mathfrak{E}^2}{j} \frac{d\omega}{\sin^3 \omega} y^2 dy. \end{aligned} \right.$$

Betrachtet man ferner nicht das Feld eines vollständigen Kreisleiters, sondern nur das Teilfeld eines Kreisbogens von bestimmter Länge, Querschnitt und Masse, welchem dann auch eine bestimmte Teilleistung entspricht, so erhält man bekanntlich als geometrischen Ort für dieses „spezifische Feld“ (pro Watt bzw. pro Gramm) die doppelapfelförmige Playfairsche (Volkmanns *D*-) Kurve, welche auch bei manchen anderen attraktorischen Aufgaben eine Rolle spielt (Fig. 13 B):

$$(XIB) \quad \varrho^2 = p^2 \sin \omega; \quad (x^2 + y^2)^3 - p^4 y^2 = 0.$$

Das Optimalprofil, welches *ceteris paribus* ein möglichst „niederwattiges“ Feld ergibt, soll bekanntlich schichtenweise nach dieser Kurve gewickelt sein, derart, daß die Stromdichte dem Parameterquadrat umgekehrt proportional bleibt; dabei kommt es auf die Gestalt des inneren Hohlraums nicht an. In Fig. 13 B bilden die Parameter der Kurvenschar eine geometrische Progression (Quotient 1,25); die sichelförmigen Flächenabschnitte sind dann untereinander ähnlich und folglich proportional \bar{p}^2 , dem Quadrat ihres mittleren Parameters. Sie müssen daher je eine und dieselbe durchfließende Gesamtstrommenge umfassen, also bei einfacher Hintereinanderschaltung und konstantem Querschnittsfaktor die gleiche Windungszahl enthalten. Teilwiderstand, Teilleistung und Teilfeld jeder Sichel verhalten sich dann umgekehrt wie \bar{p} ; der Nutzeffekt (§ 56) bzw. das spezifische Feld ist daher für alle Spulenteile der gleiche. Die abgebildeten Kurven sind orthogonale Trajektorien des um 90° gedreht gedachten Biovals.

§ 61. Bekanntlich wurden diese Beziehungen in etwas anderer Form von Maxwell mittels eines Variationsverfahrens hergeleitet, während der ursprüngliche Grundgedanke von Kelvin stammt. Im Rahmen der vorliegenden Darstellung kommt es darauf hinaus, daß

$$\frac{\frac{d}{d\mathfrak{E}}(\delta \mathfrak{H}_s)}{\frac{d}{d\mathfrak{E}}(\delta A)} = \text{const.}$$

sein soll für jeden der erwähnten sichelförmigen Abschnitte zwischen p und $p + \delta p$. In der Praxis erweist sich die richtige Schichtung erheblicher als die genaue Innehaltung der Kurvenform, wie von Hrn. Volkmann besonders betont wurde.¹⁾ Bei den Panzergalvanometern werden beispielsweise jene Wickelungsvorschriften nach Maßgabe des technisch Ausführbaren angenähert befolgt. Sie werden übrigens theoretisch ebenso für Starkfeldspulen gelten, wobei Kiloampere und Kilogauss die Rolle der Mikroampere und Mikrogauss der empfindlichen Galvanometer übernehmen.

Betrachtet man Fig. 13 dagegen in zweidimensionaler Weise, derart, daß es sich jetzt um die Spur zweier langer gerader Stromleiter in der Bildebene handelt, so fallen die beiden geometrischen Orte zusammen und entarten zu einem Einzelkreise²⁾ (Fig. 13 C). Denn es ist hier:

$$d^2 \zeta_3 = 4I \frac{y}{q^3} = 4I \frac{\sin \omega}{q} = \frac{4I}{j} \sin^2 \omega dx \cdot \frac{dy}{y} = \frac{4I}{j} \sin \omega d\omega \cdot d\varrho,$$

also:

$$(XI\ C) \quad q = p \sin \omega; \quad x^2 + y^2 - p y = 0.$$

Die Stromdichte müßte hier umgekehrt proportional \bar{p} variieren, wie sich ganz ähnlich nachweisen läßt; die Parameter bilden demnach eine arithmetische Progression, wie abgebildet. Die drei Kurven der Fig. 13 wurden hier ausführlicher besprochen, weil sie Spezialfälle bilden einer später noch zu diskutierenden allgemeineren Gleichung, wobei hier der Kosinus ausfällt, d. h. $n = 0$. Sie gehören zu den 1726 von Clairaut gefundenen, von Hrn. G. Loria Multiplikatrix genannten Kurven, denen Hr. de Jans kürzlich

1) J. C. Maxwell, Treatise (2. Ed.) 2. p. 331, Oxford 1881. W. Thomson, Proc. Phil. Soc. Glasgow 5. p. 414. 1868. E. Mascart u. J. Joubert, Electr. et Magn. 2. p. 96, Paris 1886. W. Volkmann, Die beste Gestalt für Galvanometerspulen. Diss. Berlin 1910. In dieser Arbeit wird der Übergang von der theoretischen gleichmäßigen Schichtung zur technischen sprunghaften Staffelung der Bewicklung ausführlich rechnerisch dargelegt und durch Versuche mit Spulen von Panzergalvanometern erläutert.

2) Vgl. T. Mather, Phil. Mag. (5) 29. p. 439. 1890.

eine Monographie widmete.¹⁾ Im hiesigen Laboratorium wurden übrigens bei der Untersuchung des Widerstandes orientierter Kristalle im magnetischen Felde derartige Kurven gefunden.²⁾

§ 62. *Gleichmäßig geschichtete Wickelung* (Fig. 13 B). Die Ausdrücke (59) und (60) lassen sich ohne weiteres integrieren; und zwar erhält man, wenn man obiger Vorschrift gemäß $\mathfrak{G} = P_2/p^2 = P_2 \sin \omega / \varrho^3$ setzt, wo P_2 konstant:

$$d^2 \mathfrak{G}_3 = \frac{2\pi P_2}{j} \sin^3 \omega d\omega \frac{d\varrho}{\varrho^3}, \quad d^2 A = \frac{2\pi \sigma P_2^3}{j} \sin^3 \omega d\omega \frac{d\varrho}{\varrho^3};$$

$$\frac{d^2 A}{d^2 \mathfrak{G}_3} = \sigma P_2 = \sigma p^2 \mathfrak{G};$$

daher zwischen den Grenzen $0 < \omega < \pi$ und $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$:

$$(61) \quad \mathfrak{G}_3 = \frac{2\pi P_2}{j} \int_0^\pi \sin^3 \omega d\omega \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho^3} = \frac{8\pi P_2}{3j} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right),$$

$$(62) \quad A = \frac{2\pi \sigma P_2^3}{j} \int_0^\pi \sin^3 \omega d\omega \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho^3} = \frac{8\pi \sigma P_2^3}{3j} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Hieraus folgt durch Division für das Reziproke des Wirkungsgrades:

$$(63) \quad \frac{A}{\mathfrak{G}_3} = \sigma P_2 = \sigma p^2 \mathfrak{G}, \quad \frac{A}{\mathfrak{G}_3^3} = \frac{3}{8\pi} \sigma j \varrho_1 \frac{1}{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}} = 0,1194 \sigma j \varrho_1 \frac{1}{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}.$$

Hierbei ist die Spule von einer inneren und äußeren Kugel- fläche mit dem Radius ϱ_1 bzw. ϱ_2 begrenzt gedacht; erstere umfaßt die nutzbare „Feldsphäre“; letztere ist oft so groß

1) C. de Jans, Hand. vlaamsch nat. en geneesk. Congr. 15. p. 32. Antwerpen 1910; Arch. d. Math. u. Phys. (3) 20. p. 131. 1912; Les multiplicatrices de Clairaut, Gent 1912. Vgl. auch F. Münger, Die eiförmigen Kurven, Dissert. Bern 1894. H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, 1905; Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908. P. Ernst, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 15. p. 177. 1909.

2) D. E. Roberts, Phil. Mag. (6) 26. p. 158. 1913. W. J. de Haas, Versl. Akad. Amsterd. 22. p. 1110. 1914. G. E. Washburn, Ann. d. Phys. 48. p. 236. 1915.

gegen erstere, daß ϱ_1/ϱ_2 zu vernachlässigen ist. Dann wird $A/\mathfrak{H}_3^2 = 0,1194 \sigma j \varrho_1$, unabhängig von der Stromdichte, da ja für eine gegebene Spule Zähler und Nenner deren Quadrat proportional bleiben. Für manche Zwecke empfiehlt sich parametrische Integration, wobei p statt ϱ als Variable einzuführen ist, oder $dp/p^2 \sqrt{\sin \omega}$ statt $d\varrho/\varrho^2$; man erhält dann zwischen den Grenzen p_1 und p_2 :

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{2\pi P_2}{j} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \int_0^\pi \sin^{1/2} \omega d\omega,$$

$$A = \frac{2\pi \sigma P_2^2}{j} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \int_0^\pi \sin^{1/2} \omega d\omega.$$

Für das bestimmte Integral findet man auf zweierlei Art, mittels Gammafunktion oder elliptischer Integrale

$$\int_0^\pi \sin^{1/2} \omega d\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{2} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2} (2E - K) = 1,4378,$$

wobei der Modul $k = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sin 45^\circ$. Daher wird:

$$(64) \quad \frac{A}{\mathfrak{H}_3} = \sigma P_2 = \sigma p^2 \mathfrak{C}, \quad \frac{A}{\mathfrak{H}_3^2} = \frac{5}{2\pi \cdot 6 \sqrt{2} (2E - K)} \sigma j p_1 \frac{1}{1 - \frac{p_1}{p_2}};$$

für wachsendes p_2 konvergiert A/\mathfrak{H}_3^2 gegen den Wert $0,1107 \sigma j p_1$. Hier hat der Innenraum die der Playfairschen Meridiankurve entsprechende Gestalt. Das Verhältnis A/\mathfrak{H}_3 bzw. $d^2 A/d^2 \mathfrak{H}_3$ hat überall den gleichen Wert $\sigma p^2 \mathfrak{C}$; sowohl Zähler wie Nenner verhalten sich hierbei rein additiv.

In analoger Weise, wie es in einer dritten Mitteilung ganz allgemein unter Heranziehung der Eigenschaften der Gamma- und Psi-Funktionen durchgeführt werden soll, läßt sich auch hier direkt bestätigend nachweisen, daß die günstigsten Werte der Exponenten in der allgemeinen Gleichung

$$\varrho^k = \sin^u \omega \cos^v \omega = \sin^k \omega \cos^k \omega$$

$k=2$, $u=1$, $v=0$, $\mu=1/2$, $\nu=0$ sind; dagegen für zweidimensionale Gebilde $k=1$, $u=1$, $v=0$, $\mu=1$, $\nu=0$ in Übereinstimmung mit dem Bisherigen. Zu bemerken ist noch,

daß für jede Spule gilt $A/\mathfrak{H}_3 = R I/G$ und $A/\mathfrak{H}_3^2 = R/G^2$, wo R den Spulenwiderstand, G die übliche Spulenkonstante \mathfrak{H}/I bezeichnet.

§ 63. *Zylindrische Schichtung.* Hr. Fabry¹⁾ hat für einige Spulengestalten Konstanten K berechnet; unser Zahlenfaktor von $\sigma j \varrho_1$ entspricht seiner Zahl $1/(10 K)^2$. Für einen kugeligen Hohlraum findet er 0,119, wie oben, falls $\varrho_2 = \infty$ anzunehmen ist; für einen zylindrischen Innenraum 0,138. Im übrigen beschränkt er sich auf zylindrische Spulen mit rechteckigem Profil, für welche verschiedene Funktionen eingehend graphisch diskutiert wurden. Die vorteilhafteste Spule soll einen Außenradius $B = 3,09 b$, eine Länge $2a = 3,76 b$ aufweisen, wo b den Innenradius bezeichnet; der Zahlenfaktor beträgt dann bei konstanter Stromdichte 0,312, bei zylindrisch geschichteter im günstigsten Falle 0,206. Und zwar soll dann die Drahtdicke variieren wie $\sqrt[3]{y^2(y^2 + a^2)}$, also die Stromdichte \mathfrak{C} umgekehrt proportional $y\sqrt{y^2 + a^2}$; für eine kurze rechteckige Spule hat also \mathfrak{C} proportional $1/y^2$ zu bleiben, für eine lange variiert es wie $1/y$.

Diese Schichtungsart läßt sich technisch am leichtesten herstellen, insbesondere bei rechteckigem oder trapezoidalem Profil. Dann ist die Stromdichte nur Funktion des Lagenradius y , wie es ja in den §§ 53 und 55 schon vorausgesetzt wurde. Läßt man in den dortigen Gleichungen \mathfrak{J} bzw. f schwinden, so erhält man ohne weiteres die Formeln für den Fall, daß nur das Spulenfeld \mathfrak{H}_3 in Betracht kommt; für eine Windungslage folgt aus (37):

$$d\mathfrak{H}_3 = \frac{4\pi \mathfrak{C} \cos \alpha}{j} dy.$$

Maßgebend ist also nur das Verhältnis \mathfrak{C}/j , d. h. die „scheinbare Stromdichte“, gerechnet über den jedes Windungsprofil umgebenden Elementarquerschnitt $dx dy$. Es wird nach wie vor der Querschnittsfaktor j über die ganze Spule unveränderlich vorausgesetzt, um die Formeln übersichtlich zu gestalten. Im zweiten Hauptfall trifft man damit für die Deslandres-Perotschen Spiralen wohl das Richtige. Im

1) Ch. Fabry, l. c. Vgl. auch E. Mascart u. J. Joubert, l. c. p. 91; sowie W. Weber, Gött. Abh. 10. p. 26. 1862.

ersten Hauptfall wird man j nach außen füglich etwas zunehmen, im dritten etwas abnehmen lassen. Letztere Annahme findet man bereits bei Maxwell l. c. Diese Frage hängt indessen zusammen mit der Spezialanordnung der Spule bzw. der sie durchfließenden Wasserspülung.

§ 64. Wenn es auf die verbrauchte Leistung nicht ankommt, wird man α so gering wählen, daß $\cos \alpha$ nicht viel kleiner als Eins wird. Sparsamer verfährt man bei Beachtung der aus (55) für $f = 0$ entstehenden Formel:

$$(65) \quad \frac{dA}{(d\mathfrak{H}_3)^2} = \frac{\sigma j y^2}{2\pi \sin 2\alpha dy},$$

welche offenbar für $\alpha = 45^\circ$ ein Minimum aufweist. Da hier kein Grund vorliegt, α von Lage zu Lage variieren zu lassen, handelt es sich um Spulen mit trapezoidalem Wickelraum. Bei der Integration kann man wieder drei Hauptfälle unterscheiden:

1. Konstante Stromdichte, die man vorschreiben kann, wenn die Leistung keine Rolle spielen sollte; man erhält

$$(66) \quad \mathfrak{H}_3 = \frac{4\pi \mathfrak{C} \cos \alpha}{j} (B - b), \quad A = \frac{4\pi \sigma \mathfrak{C}^2}{j \tan \alpha} \frac{1}{3} (B^3 - b^3),$$

$$\frac{A}{\mathfrak{H}_3^2} = \frac{\sigma j b}{2\pi \sin 2\alpha} \frac{w^3 - 1}{3(w - 1)^2}.$$

2. Im Falle $\mathfrak{C} = C_1/y$, wie bei den Silberspiralen mit stetig variierender Stromdichte, folgt aus (56) für $f = 0$ die bereits von den Herren Deslandres und Perot hergeleitete Formel (67), deren zweiter Bruch für $w = 4,9365$ ein Minimum ($= 1,5476$) aufweist.

$$(67) \quad \mathfrak{H}_3 = \frac{4\pi C_1 \cos \alpha}{j} \log \frac{B}{b}, \quad A = \frac{4\pi \sigma C_1^2}{j \tan \alpha} (B - b),$$

$$\frac{A}{\mathfrak{H}_3^2} = \frac{\sigma j b}{2\pi \sin 2\alpha} \frac{w - 1}{(\log w)^2};$$

für $\alpha = 45^\circ$ und $w = 4,9365$ wird $A/\mathfrak{H}_3^2 = 0,2463 \sigma j b$.

3. Für $\mathfrak{C} = C_2/y^2$ erhält man schließlich:

$$(68) \quad \mathfrak{H}_3 = \frac{4\pi C_2 \cos \alpha}{j} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right), \quad A = \frac{4\pi \sigma C_2^2}{j \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right),$$

$$\frac{A}{\mathfrak{H}_3^2} = \frac{\sigma j b}{2\pi \sin 2\alpha} \frac{1}{1 - \frac{1}{w}};$$

der zweite Bruch konvergiert abnehmend gegen Eins, wenn w zunimmt; für $\alpha = 45^\circ$ und $w = \infty$ nähert sich A/\mathfrak{H}_3^2 dem Werte $0,1592 \sigma j b$.

Setzt man schließlich allgemeiner $\mathfrak{C} = C_k/y^k$, so erhält man

$$(69) \quad \mathfrak{H}_3 = \frac{4\pi C_k \cos \alpha}{j} \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{B^{k-1}} \right),$$

$$A = \frac{4\pi \sigma C_k^2}{j \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2k-3} \left(\frac{1}{b^{2k-3}} - \frac{1}{B^{2k-3}} \right),$$

$$\frac{A}{\mathfrak{H}_3^2} = \frac{\sigma j b}{2\pi \sin 2\alpha} \frac{(k-1)^2}{2k-3} \frac{1 - \frac{1}{w^{2k-3}}}{\left(1 - \frac{1}{w^{k-1}}\right)^2}.$$

Der letzte Bruch konvergiert bei wachsendem w wieder gegen Eins; der Bruch $(k-1)^2/(2k-3)$ dagegen zeigt ein Minimum für $k=2$, wodurch also der dritte Hauptfall tatsächlich auch hier als derjenige erwiesen ist, welcher dem höchsten Wirkungsgrad entspricht. Dieser ist umgekehrt proportional b , dem Radius des nutzbaren zylindrischen Feldraumes.

§ 65. *Gleichförmigkeitsgrad.* Die hierfür maßgebende zweite Derivierte erhält man durch Integration der Gleichung (57) als:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_3}{\partial x^2} = - \frac{12\pi}{j} \int_b^B \sin^4 \alpha \cos \alpha \cdot \mathfrak{C} \frac{dy}{y^2}.$$

Bei trapezoidalen Spulen ist α konstant und wird in den drei Hauptfällen:

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathfrak{C} = \text{const.} \quad & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_3}{\partial x^2} = - \frac{12\pi \mathfrak{C} \sin^4 \alpha \cos \alpha}{j} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right), \\ 2. \quad \mathfrak{C} = C_1/y \quad & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_3}{\partial x^2} = - \frac{6\pi C_1 \sin^4 \alpha \cos \alpha}{j} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right), \\ 3. \quad \mathfrak{C} = C_2/y^2 \quad & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_3}{\partial x^2} = - \frac{4\pi C_2 \sin^4 \alpha \cos \alpha}{j} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{B^3} \right). \end{aligned}$$

Bei rechteckigem Querschnitt sind die Verhältnisse genügend bekannt. Übrigens wurde von Hrn. Bestelmeyer¹⁾ eine neue Reihenentwicklung für die axiale Feldkomponente in exzentrischen Punkten mitgeteilt. Den Mangel an Uniformität kompensiert er bei einer kurzen Spule annähernd, indem die fehlenden halbumendlichen Enden durch zwei kleinere Zusatzspulen ersetzt werden. Derartige sich beiderseitig verjüngende Wickelräume bilden schließlich den Übergang zu

§ 66. *Ellipsoidspulen.* Die Schwierigkeit der Herstellung solcher Spulen hat wohl eine ausgedehntere Verwendung bisher verhindert, dürfte aber vielleicht nicht viel größer sein als bei gekühlten Starkstromspulen überhaupt. Jedenfalls wäre die vorliegende Diskussion ohne deren nähere Betrachtung unvollständig. Bekanntlich wies Maxwell²⁾ darauf hin, daß ein parallel und äquidistant vollständig bewickeltes Ellipsoid ein gleichförmiges Feld umfaßt. Es empfiehlt sich, dieses dort allgemein potentialtheoretisch begründete Ergebnis für Ovoide auf direktem Wege herzuleiten, weil sich der Einfluß einzelner Bewickelungsteile, etwa fehlender Endsegmente, alsdann ohne weiteres übersehen läßt. Die Mittelpunktsgleichung des Rotationsellipsoids sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

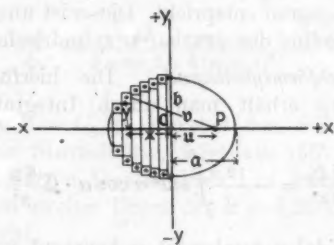


Fig. 14.

1) A. Bestelmeyer, Physik. Zeitschr. 12. p. 1107. 1911. Laut einer gefälligen Privatmitteilung sind dort die Potenzen von q teilweise um Eins zu erhöhen; die angegebenen Zahlen werden von diesem Druckfehler indessen nicht berührt.

2) J. C. Maxwell, Treatise (2. Ed.) 2. p. 283. Vgl. F. F. Martens, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. p. 8. 1914.

In Fig. 14 gilt nun für einen beliebigen exzentrischen Achsenpunkt $P(u)$ im Abstände b von einer kreisförmigen Windung:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad v^2 = (b^2 + u^2) - 2ux + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2.$$

Unter Einführung des Achsenverhältnisses $m = a/b$ wird nach Gleichung (59) für eine Windungslage:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{S}_3 &= \frac{2\pi \mathfrak{C} dy}{j} \int \frac{y^2 dx}{v^3} \\ &= \frac{\mathfrak{C} dy}{j} \int \frac{2\pi m(a^2 - x^2) dx}{\sqrt{a^2 + m^2 u^2 - 2m^2 ux + (m^2 - 1)x^2}}. \end{aligned}$$

Die Integration¹⁾ ergibt für ein Ovoid ($m > 1$) zwischen den Grenzen x_1 und x_2 :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{S}_3 &= \frac{\mathfrak{C} dy}{j} \frac{4\pi}{m^2 - 1} \\ &\quad \left[m^3 \frac{((m^2 - 1)a^2 - (m^2 + 1)u^2)x - (m^2 - 2)a^2 u + m^2 u^3}{2((m^2 - 1)a^2 - m^2 u^2)\sqrt{v^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{4\sqrt{m^2 - 1}} \log \frac{(m^2 - 1)x - m^2 u + m\sqrt{m^2 - 1}v^2}{(m^2 - 1)x - m^2 u - m\sqrt{m^2 - 1}v^2} \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \right.$$

§ 67. Falls das Ovoid von einem Ende zum anderen durchweg gleichmäßig äquidistant bewickelt ist, wird dieser Ausdruck zwischen den Grenzen $x_1 = -a$ und $x_2 = +a$ zu nehmen sein. Dann, und auch nur dann, vereinfacht er sich erheblich und ergibt sich:

$$(71) \quad d\mathfrak{S}_3 = \frac{\mathfrak{C} dy}{j} \frac{4\pi}{m^2 - 1} \left[m^2 - \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \log(m + \sqrt{m^2 - 1}) \right].$$

1) In ähnlicher Weise lassen sich die Integrationen bei hyperboloidischen und ellipsoidischen Rundarmaturen auch für exzentrische Achsenpunkte in elementarer — wenn auch komplizierter — Weise durchführen, wenn man nach dx integriert statt nach dy^2 (vgl. §§ 5, 18). Es folgt das übrigens ohne weiteres aus der Äquivalenz jedes einzelnen Kreisleiters mit einer magnetischen Schale (vgl. § 58).

Wegen des gänzlichen Fortfalls der Abszisse u gilt dieser Feldwert für jeden Achsenpunkt und wegen des Zusammenhanges zwischen Längs- und Quergefälle nunmehr auch für alle inneren Punkte überhaupt. Unter Einführung des Entmagnetisierungsfaktors N_x (vgl. § 18) für das Achsenverhältnis m kann man die Intensität des gleichförmigen Spulenfeldes auch schreiben:

$$(72) \quad d\mathfrak{H}_3 = \frac{\mathfrak{G} dy}{j} (4\pi - N_x) = \frac{I}{dx} (4\pi - N_x).$$

Die Berechnung der Leistung ergibt:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{2\pi\sigma\mathfrak{G}^2 dy}{j} ab \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= \frac{2\pi\sigma\mathfrak{G}^2 dy}{j} ab \left[\frac{x}{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

und für das vollbewickelte Ovoid zwischen den Grenzen $x = \pm a$:

$$(73) \quad dA = \frac{\pi^2 \sigma \mathfrak{G}^2 m b^2 dy}{j}.$$

Division durch $(d\mathfrak{H}_3)^2$ führt schließlich zu:

$$(74) \quad \frac{dA}{(d\mathfrak{H}_3)^2} = \frac{1}{16} \frac{\sigma j b^2}{dy} \frac{(m^2 - 1)^3}{m(m\sqrt{m^2 - 1} - \log(m + \sqrt{m^2 - 1}))^2}.$$

Der Bruch nimmt unbegrenzt zu, wenn m von Eins aufwärtssteigt, und konvergiert dabei selbst gegen den Wert m . Der Fall des Sphäroids bietet kaum praktisches Interesse. Gleichung (72) gilt nach wie vor, und wegen des höheren Wertes von N_x wird das Feld entsprechend schwächer.

§ 68. *Kugelspulen.* Wenn man in Gleichung (71) $m > 1$ gegen Eins konvergieren läßt, indem man $\sqrt{m^2 - 1} = \delta$ setzt, so ergibt die Reihenentwicklung von $\log(1 + \delta + \delta^2/2)$:

$$(75) \quad d\mathfrak{H}_3 = \frac{8\pi}{3} \frac{\mathfrak{G} dy}{j} = \frac{8\pi}{3} \frac{I}{dx},$$

was auch sofort aus (72) folgt, wenn man $N_x = 4\pi/3$ setzt und im Einklang steht mit dem potentialtheoretischen Er-

gebnis, bzw. dem direkt für einen beliebigen Achsenpunkt innerhalb einer Kugel vom Radius r ähnlich wie oben hergeleiteten Feldwerte:

$$d\mathfrak{H}_3 = \frac{\mathfrak{C} dy}{j} \int_{-r}^{+r} \frac{2\pi(r^2 - x^2) dx}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2ux}}.$$

Da für $m=1$ und $b=r$ Gleichung (73) sich auf $dA = \pi^2 \sigma \mathfrak{C}^2 r^2 dy/j$ reduziert, wird

$$(76) \quad \frac{dA}{(d\mathfrak{H}_3)^2} = \frac{9}{64} \frac{\sigma j r^2}{dy} = 0,1406 \frac{\sigma j r^2}{dy}.$$

Eine solche kugelige Windungslage ist daher etwas ökonomischer als eine trapezoidale von gleichem Radius $y=r$, für welche nach Gleichung (65) bei $\alpha=45^\circ$ der Zahlenfaktor $1/2\pi=0,1592$ beträgt; außerdem wird durch erstere die Uniformität des Feldes ohne weiteres gewährleistet.

Voraussetzung ist dabei nach wie vor eine durchweg linear äquidistante Bewickelung, ähnlich wie in Fig. 14. Würde man dagegen die Windungen peripherisch gleichmäßig über einen Meridian verteilen, so erhielte man:

$$d\mathfrak{H}_3 = \frac{\mathfrak{C} dy}{j} \int_0^\pi 2\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi^2 \mathfrak{C} dy}{j}, \quad dA = \frac{2\pi^2 \sigma \mathfrak{C}^2 r^2 dy}{j},$$

$$\frac{dA}{(d\mathfrak{H}_3)^2} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\sigma j r^2}{dy} = 0,2015 \frac{\sigma j r^2}{dy}.$$

Eine derart gewickelte Kugelspule würde also bedeutend ungünstiger sein und zudem kein gleichförmiges Feld liefern.

Bekanntlich läßt sich eine Kugelspule angenähert ersetzen durch zwei Teilspulen auf Parallelkreisen (Polabstand $v = \arctg \sqrt{4} = 63^\circ 26'$) nach Gaugain-Helmholtz. Noch besser verwendet man drei¹⁾, und zwar eine Äquatorealspule (n Win-

1) E. Mascart u. J. Joubert, *Electr. et Magn.* 2. p. 123. Paris 1886.

dungen) und zwei auf Parallelkreisen (je $(7/8)^2 n$ Windungen, Polabstand $v = \arctg \sqrt{\frac{4}{3}} = 49^\circ 6'$). Der Gleichförmigkeitsgrad ist dann recht befriedigend, bis auf Glieder dritter Ordnung, wie sich mittels der zweiten Derivierten

$$\frac{\partial^2 (d^2 \Phi_0)}{\partial x^2} = 6 \pi I \frac{\sin^2 v (5 \cos^2 v - 1)}{r^3}$$

leicht nachweisen läßt. Bei gleicher Stromstärke und Feldstärke beträgt der Widerstand 0,976 derjenigen einer äquivalenten Kugelspule, mithin auch die Leistung und ebenso $dA/(d\Phi_0)^2$.

(Eingegangen 28. September 1916.)

**2. Elektrischer Widerstand und Thermokraft
des kristallinen Wismuts;
von G. Borellus und A. E. Lindh.**

Einleitung.

Für mehrere theoretische Fragen sind allseitige Untersuchungen über die Eigenschaften der metallischen Kristalle von großem Interesse, besonders dort, wo die Eigenschaften in verschiedenen Kristallrichtungen verschieden sind. Wie bekannt, gibt das Wismut ein gutes Beispiel eines solchen Kristalls, wo eine Richtung vor den anderen ausgezeichnet ist. Von Wismut lassen sich auch besser, als von irgendeinem anderen Metalle, große Kristalle erhalten. Trotzdem sind die Eigenschaften des Wismuts in ihrer Abhängigkeit von der Kristallrichtung noch nicht bei weitem genügend untersucht.

Wir wollen die neueren Untersuchungen der oben angegebenen Eigenschaften kurz erwähnen. Die Messungen von van Everdingen¹⁾ (Widerstand bei $+15^{\circ}$) und Lownds²⁾ (Widerstand, Thermokraft usw. zwischen -186° und Zimmertemperatur) stimmen sowohl miteinander wie mit unseren Messungen sehr schlecht überein. Viel besser mit den unsrigen verträglich sind die Messungen von F. L. Perrot³⁾ und F. W. Jordan⁴⁾ an Thermokräften gegen Kupfer zwischen 0° und 100° .

Die schlechte Übereinstimmung kann vielleicht zum Teil ungleicher Vorbehandlung des Wismutmaterials zugeschrieben werden. Es ist aber durchaus wahrscheinlich, daß in mehreren Fällen auch beträchtliche Verunreinigungen störend mitgewirkt haben.

1) E. van Everdingen, Comm. Phys. Lab. Leyden **63**. 1900.

2) L. Lownds, Ann. d. Phys. **6**. p. 146. 1901; **9**. p. 677. 1902.

3) F. L. Perrot, Arch. d. sc. phys. **6**. p. 105. 1898; **6**. p. 229. 1898; **7**. p. 149. 1899.

4) F. W. Jordan, Phil. Mag. **21**. p. 455. 1911.

Daß derselbe Einwand nicht auch gegen unsere Messungen erhoben werden kann, hoffen wir bei der Besprechung der Resultate der Widerstandsmessungen durch Vergleiche mit den besten früheren Untersuchungen an nicht kristallinisch orientiertem Materiale nachweisen zu können.

Das Wismutmaterial.

Um für die Untersuchungen anwendbares Wismutmaterial zu erhalten, wurde folgenderweise verfahren: Ein dünnwandiges zylindrisches Glasgefäß von etwa 3 cm Höhe und 2 cm Durchmesser wurde mit kleinen Stücken von Kahlbaums reinem Wismut in Platten beschickt. Das Gefäß wurde dann in einen Heraeusofen niedergesetzt und bis ungefähr $+320^{\circ}\text{C}$. erhitzt. Der Ofen war mit einem Amperemeter und einem Regulierwiderstand in Serie geschaltet, wodurch ermöglicht wurde, die Temperatur beliebig zu variieren. Als die erwähnte Temperatur erreicht war, wurde die Stromstärke vermindert und durch sukzessive Verminderung wurde ein Temperaturgefälle von etwa $0,75^{\circ}\text{C}$. pro Minute erreicht. Als das Ganze Zimmertemperatur angenommen hatte, wurde der „Wismutzylinder“ in zwei Teile zerbrochen und es erwies sich dann, daß die Spaltebenen fast den ganzen Wismutzylinder hindurch zueinander parallel verliefen. Aus den beiden großen Wismutstücken wurden dann kleine Stäbchen, teils parallel zur Kristallachse (senkrecht zu den Spaltebenen), teils senkrecht zur Kristallachse (parallel zu den Spaltebenen) gesägt. Die Stäbchen waren bis zu 20 mm lang und hatten variierende Querschnitte.

Im folgenden sind die untersuchten Stäbchen, die direkt aus dem Schmelzstück gesägt worden sind, bei ihrer ersten Messung mit z. B. $A \parallel$ und $B \perp$ bezeichnet, wo \parallel und \perp die Lage der Längsrichtung in bezug auf die *Kristallachse* (nicht, wie oft die Spaltebenen) angeben. Die Bezeichnungen a , b , c usw. wurden dann solchen Stäbchen hinzugefügt, die vor der bezüglichen Untersuchung auf eine andere Temperatur als Zimmertemperatur gebracht worden sind. Die speziellen Bedeutungen dieser Zeichen werden bei den Tabellen jedesmal näher angeführt werden.

Sämtliche hier mitgeteilten Messungen sind innerhalb 40 Tagen nach Herstellung des angewandten Schmelzstückes ausgeführt.

Methode der Widerstandsmessungen.

Der Widerstand wurde auf gewöhnliche Weise mit Ampere- und Millivoltmeter gemessen. Die Versuchsanordnung geht aus der Fig. 1 hervor. Der benutzte Millivoltmeter (M.V.) von Siemens-Halske maß 10^{-4} Volt pro Skalenteil. Derselbe Millivoltmeter wurde auch für die Temperaturmessungen mittels eines Thermoelements Kupfer-Nickelin benutzt. Das Thermoelement wurde im Vergleich zu an der Reichsanstalt in Charlottenburg korrigierten Quecksilber- und Flüssigkeitsthermometern zwischen -180° und $+300^{\circ}$ kalibriert, wobei die eine Lötstelle immer auf ungefähr $+18^{\circ}$ gehalten wurde. Auf die Schwankungen der Zimmertemperatur ist nötige Rücksicht genommen. Die Meßinstrumente waren kontrolliert.

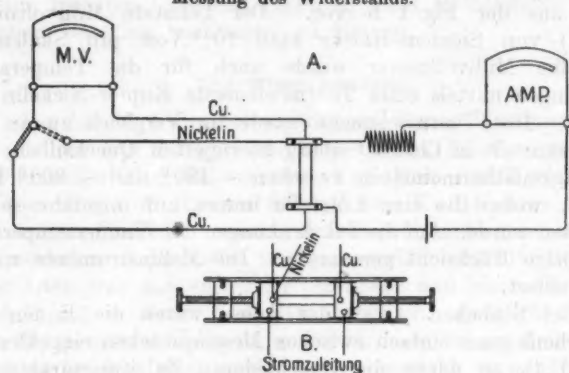
Bei Stäbchen \perp zu der Achse waren die Enden des Stäbchens ganz einfach zwischen Messingstücken eingeklemmt (Fig. 1 A), an denen die verschiedenen Zuleitungsdrähte befestigt waren. Es war auch keine Schwierigkeit, solche Stäbchen mit hinreichend großem Widerstand aus dem Schmelzstück herzustellen. Gilletteklingen wurden hierbei mit Vorteil benutzt, um dünne Wismutblättchen aus dem Schmelzstück abzuspalten.

Wegen der Sprödigkeit in den Spaltebenen wird es dagegen unmöglich, allzu dünne Stäbe \parallel zur Achse auszusägen. Wir hatten also hier nur recht dicke Stäbchen mit verhältnismäßig kleinem Widerstand und es wurde daher notwendig, die Zuleitungsstücke an ihre Endflächen heranzudrücken, damit die Stromlinien überall parallel der Achsenrichtung verliefen. Damit wurde auch erzielt, den Druck in der Achsenrichtung variieren zu können, was, wie wir sehen werden, von großem Interesse ist. Die Anordnung geht aus Fig. 1 B hervor. Die kupfernen Zuleitungsstücke werden, durch dünne Glimmerblättchen isoliert, zwischen zwei Messingschienen eingeklemmt und durch Schrauben und Federn an den Wismutstab gedrückt. Hierdurch wird auch für ziemlich gleichmäßige Temperatur im Apparate gesorgt. Wenn jedoch kleine Thermokräfte auftreten, werden diese an dem Voltmeter ersichtlich und können dadurch eliminiert werden.

Zur Erreichung der hohen und niederen Temperaturen wurden Herausöfen bzw. Dewargefäße mit flüssiger Luft

benutzt. Durch Verschiebung der Apparate, in denen die Wismutstäbchen eingeklemmt waren, in dem Dewargefäß,

Messung des Widerstands.



Messung der Thermokräfte.

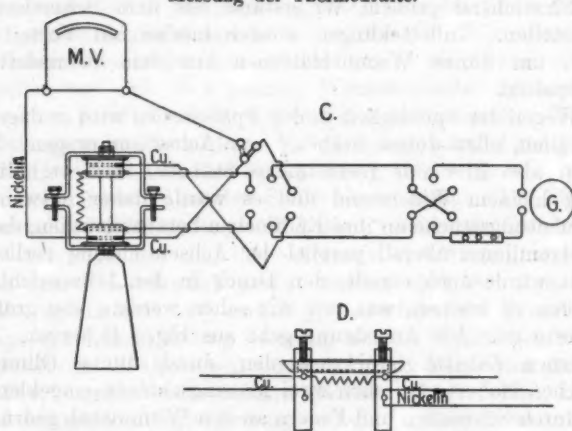


Fig. 1.

wurde es möglich, die Temperatur zu variieren. In der Tat machen die Variationen der gemessenen Effekte auf Grund thermischer Vorbehandlung usw. das Verwenden bei jeder Temperatur von konstanten Temperaturbädern überflüssig.

Messungen der Thermokräfte.

Die Thermokräfte Bi-Cu sind indirekt im Vergleiche zu einem Thermoelement von Kupfer und einer Widerstandslegierung (aus Cu und Ni in nicht bekannten Konzentrationen) gemessen. Das Vergleichselement wurde sowohl für hohe als niedere Temperaturen mit korrigierten Thermometern verglichen und die Thermokraft dE/dt durch graphisches Differenzieren der gemessenen thermoelektromotorischen Kraft E berechnet. Die Versuchsanordnung geht aus Fig. 1 *C* und *D* hervor. Der Apparat in *C* wurde für Temperaturen zwischen -180 und $+230^{\circ}\text{C}$. benutzt. Für Wismut in der Nähe des Schmelzpunktes wurde anstatt dessen die Anordnung *D* eingeschaltet. Der Apparat in *C* besteht aus zwei Messingbügeln, die durch Schrauben vereinigt sind. In jedem der Bügel ist ein zylindrisches Kupferstück isoliert eingesetzt. Zwischen diesem Kupferstücke wurde das zu messende Wismutstäbchen eingeklemmt. Ungefähr $0,5\text{ mm}$ von den Endebenen der Kupferstücke, die das Wismutstäbchen umfassen, sind die Kupferstücke durchgebohrt und in den Durchbohrungen gut hineinpassende Kupferdrähte (1 mm Diameter), die mit Seide und etwas Emaillack dünn isoliert sind, hineingestochen, an deren Enden die Drähte des Vergleichselements befestigt sind. Die Drähte des Vergleichselements waren, um störende Wärmeleitungen zu vermeiden, sehr dünn. In dem einen Kupferstück war, um größere Wärmekapazität zu erhalten, ein großer Kupferkegel befestigt. War der Apparat mit diesem Kegel nach unten in einen Tiegelofen oder in das Dewargefäß mit flüssiger Luft gebracht, stellte sich die nötige Temperaturdifferenz zwischen den Enden des Wismutstabes durch Wärmeaustausch mit der Umgebung nach geeigneter Verpackung mit Baumwolle o. dgl. ohne weiteres ein.

Die thermoelektrische Kraft Bi-Cu sowie die des Vergleichselements wurde mittels einer Wippe umwechselnd demselben Galvanometer (G), ein empfindliches Drehspulinstrument von Hartmann und Braun, angelegt. Zur Bestimmung der Temperatur wurde, wie bei den Widerstandsmessungen, dasselbe Thermoelement, Cu-Nickelin, angewandt. Das Thermoelement maß die höchste bzw. tiefste Temperatur des Wismutstäbchens. Aus den Angaben des Vergleichselements konnte die Temperaturdifferenz ermittelt werden.

Zur Messung der Thermokräfte bei und in der Nähe des Schmelzpunktes wurde der in Fig. 1 D abgebildete Apparat verwendet. Er besteht aus zwei Kupferplatten. Durch zwei Löcher in demselben wurde ein Glasschiff, in den das Wismutstäbchen gelegt war, eingeschoben. Durch zwei Kupferschrauben steht das Wismutstäbchen in Kontakt mit den Kupferstücken, in denen das Cu-Nickelinelement und das Vergleichselement eingesetzt waren. Weiter wurden bei dieser Messung zwei Galvanometer benutzt, so daß die Thermokraft Bi-Cu ununterbrochen und gleichzeitig mit dem Vergleichselement abgelesen werden konnte,

Die Thermokräfte der Wismutstäbe wurden in bezug auf käufliche Kupferdrähte gemessen, die dann mit von Kahlbaum erhaltenen reinen Kupferdrähten verglichen wurden.

Resultate der Widerstandsmessungen.

Einige Resultate der Widerstandsmessungen sind in den Tab. 1 und 2 zusammengestellt und in der Fig. 2 eingezeichnet. Wir haben teils die Temperaturfunktionen der Widerstände (W), teils den spez. Widerstand bei Zimmertemperatur gemessen. Bei den Stäben \parallel zur Achse sind diese Größen an demselben Material ermittelt; \perp zur Achse sind sie dagegen gesondert gemessen. Die Temperaturfunktion wird in den Tabellen so angegeben, daß sie bei $+18^\circ$ gleich der absoluten Temperatur oder 291 wird. Der spezifische Widerstand \perp zur Achse wurde bei $+19,6^\circ$ mit aller Genauigkeit an einem sehr schönen Wismutstreifen mit natürlichen Spaltebenen gemessen, und die erhaltenen Werte müssen also als besonders sicher betrachtet werden. Der spezifische Widerstand wird in Ohm-cm 10^4 angegeben.

Wie ersichtlich, verläuft die Temperaturfunktion des Widerstandes \perp zur Achse unterhalb etwa $+100^\circ$ C. mit der absoluten Temperatur ziemlich proportional, um über dieser Temperatur steiler anzusteigen.

Der Widerstand \parallel zur Achse (senkrecht zu den Spaltebenen) ist größer als \perp zur Achse und ist sehr davon abhängig, ob der Stab vor dem Messen größerem Druck in der Achsenrichtung ausgesetzt worden ist. $F \parallel$ ist bei sehrmäßigem, $E \parallel c$ und d bei ziemlich großem Druck der Schrauben gemessen. Merkwürdig ist, daß für beide, der Zusatz-

Tabelle 1.

Widerstand \perp -Achse. $L \perp$ und $G \perp$ zum ersten Male gemessen. $G \perp a$ nach Erwärmung auf 230° gemessen. $G \perp b$ nach weiterer Abkühlung auf -180° gemessen.

Material	Absolute Temperatur	$\frac{W_1}{W_{18}} \cdot 291$	Spez. Widerstand
$L \perp$	292,6	292,6	1,155
$G \perp$	313,5	313,5	1,238
	334,5	332,1	1,311
	351,5	349,6	1,380
	372	369,6	1,459
	392,5	397,6	1,570
	415	429,6	1,696
	434,5	466,9	1,844
	456	507,5	2,004
	475,5	551,7	2,178
	503	623,2	2,461
$G \perp a$	283,5	278,5	1,101
	255	262,6	1,036
	239	243,2	0,962
	215	206,4	0,815
	181	182,1	0,718
	145	154,2	0,618
	124	138,6	0,547
	116	129,3	0,511
$G \perp b$	276,5	292,7	1,155

Spezifischer Widerstand.

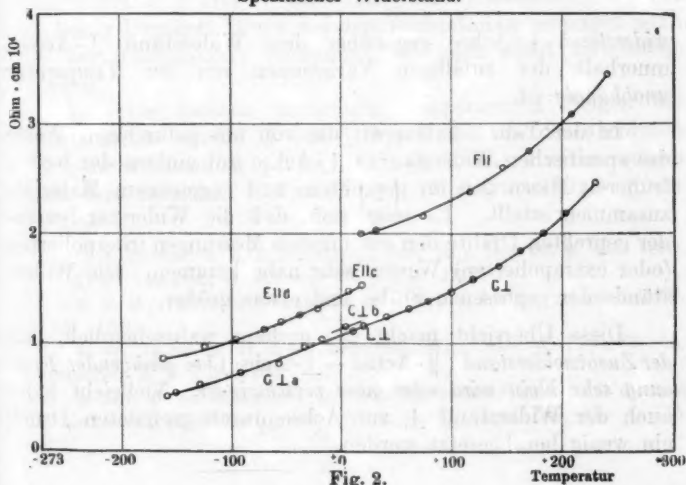


Fig. 2.

Tabelle 2.

Widerstand \parallel -Achse. $F \parallel$ zum ersten Male gemessen. $E \parallel c$ nach Abkühlung auf -180° , Erwärmung auf $+150^\circ$ und Pressen in der Achsenrichtung. $E \parallel d$ nach mehrmaliger Abkühlung auf -180° bei steigender Temperatur gemessen.

Material	Absolute Temperatur	$\frac{W_t}{W_{18}} \cdot 291$	Spez. Widerstand
$E \parallel c$	291	291,0	1,523
$E \parallel d$	112	165,0	0,864
	149	183,7	0,961
	177	197,6	1,034
	203	213,7	1,119
	218	228,0	1,193
	235	240,6	1,259
	251	251,5	1,316
	278,5	280,6	1,469
$F \parallel$	291	291,0	1,994
	304,5	295,4	2,023
	346,5	314,2	2,152
	389	347,4	2,379
	419	379,4	2,598
	443	401,1	2,745
	481,5	450,3	3,084
	513,5	507,8	3,477

widerstand \parallel -Achse gegenüber dem Widerstand \perp -Achse, innerhalb der zufälligen Variationen von der Temperatur unabhängig ist.

In der Tab. 3 haben wir die von uns gefundenen Werte des spezifischen Widerstandes \perp -Achse mit einigen der besten früheren Messungen an gepreßtem und gegossenem Materiale zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die Widerstandswerte der gepreßten Drähte den aus unseren Messungen interpolierten (oder extrapolierten) Werten sehr nahe kommen. Die Widerstände der gegossenen Stäbe sind etwas größer.

Diese Übersicht macht es durchaus wahrscheinlich, daß der Zusatzwiderstand (\parallel -Achse — \perp -Achse) bei genügender Pressung sehr klein wird oder ganz verschwindet. Vielleicht kann auch der Widerstand \perp zur Achse durch geeigneten Druck ein wenig herabgesetzt werden.

Tabelle 3.

Temperatur	Spez. Widerstand in Ohm-cm 10^4		Wismutmaterial	Beobachter
	\perp -Achse	Draht		
- 185°	0,43	0,41	{ Elektrolytisch, gepreßt	Dewar u. Fleming ¹⁾
- 79	0,77	0,78		
+ 19	1,15	1,16		
+ 22	1,17	1,09	{ Elektrolytisch,	Lenard ²⁾
		1,15	{ gepreßt bei 155°	
			{ „ „ 230°	
+ 18	1,14	1,21	{ „Kahlbaum 1914“	Mylius u. Groschuff ³⁾
			{ gepreßt	
+ 100	1,48	1,19	{ Gegossen	Jäger u. Diesselhorst ^{4,5)}
		1,60		

Resultate der Messungen der Thermokräfte.

In den Tab. 4—6 sind die mittleren Temperaturen t_m der Wismutstäbe sowie die Temperaturdifferenz Δt ihrer Enden angegeben. Die mittleren Thermokräfte $\Delta E/\Delta t$ werden in Volt $\cdot 10^{-7}$ in bezug auf Kahlbaums Kupfer angegeben. Dieselben Resultate sind auch in der Fig. 3 verzeichnet.

Die Resultate sind von der Vorgeschichte der Stäbe ziemlich abhängig, und dies besonders \parallel zur Hauptachse. Starke Erwärmung der Stäbe scheint die Verschiedenheit der Thermokräfte \parallel und \perp zur Achse zu vermindern. Ob ein ähnlicher Druckeffekt wie bei den Widerstandsmessungen auch bei der Thermokraft vorkommt, ist noch nicht festgestellt worden.

Bei den tiefsten erreichten Temperaturen steigen die Thermokräfte sowohl \parallel als \perp zur Achse mit der absoluten Temperatur ziemlich proportional (d. h. die Kurven zeigen nach dem absoluten Nullpunkt hin). Die Thermokraft \perp zur

1) J. Dewar u. J. A. Fleming, Proc. Roy. Soc. **60**. p. 425. 1896.

2) P. Lenard, Wied. Ann. **39**. p. 619. 1890.

3) F. Mylius u. E. Groschuff, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **36**. p. 155. 1916.

4) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanst. **3**. p. 269. 1900.

5) Mit diesen Messungen gut übereinstimmend sind auch die von G. Gehlhoff u. F. Neumeier, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**. p. 876. 1913.

Tabelle 4.

Thermokraft \perp -Achse. $B \perp$ und $C \perp$ zum ersten Male gemessen. $B \perp a$ auf -180° abgekühlt bei steigender Temperatur gemessen. $C \perp a$ auf $+240^\circ$ erwärmt bei sinkender Temperatur gemessen.

Material	t_m	Δt	$\Delta E / \Delta t$
$B \perp$	- 10	4,7	549
	26	5,4	536
	75	55	555
	107	40	492
	162	40	353
	167	30	339
$B \perp a$	161	28	372
	83	65	524
	67	34	517
	55	13	520
	4	7,4	371
	1	1,6	560
$C \perp$	+ 38	3,8	526
	61	5,2	528
	77,5	7,1	535
	122	12	529
	193,5	20	514
$C \perp a$	216,5	24	483
	162,5	14	514
	102,5	8,3	573
	64,5	17	575
	49	7,7	568

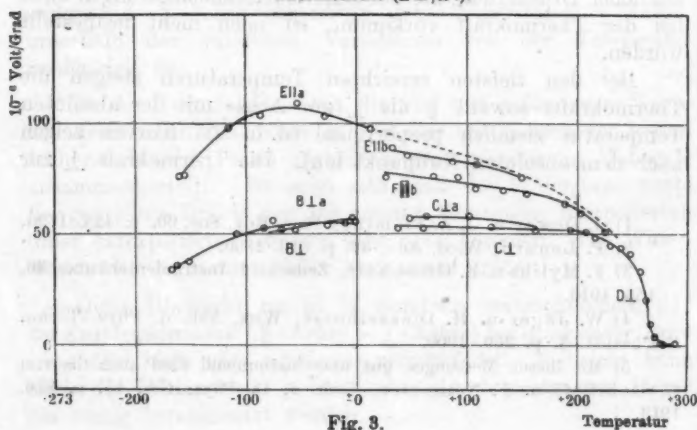
Thermokraft ($\Delta E / \Delta t$).

Fig. 3.

Tabelle 5.

Thermokraft $||$ -Achse. $E || a$ nach Abkühlung auf -180° bei steigender Temperatur gemessen. $E || b$ früher auf -180° abgekühlt zwei Tage später bei steigender Temperatur gemessen. $F [||] b$ früher auf 250° erwärmt.

Material	t_m	Δt	$\Delta E / \Delta t$
$E a$	-160	28	760
	157	31	764
	115	24	977
	100	55	1014
	86	11	1033
	53	8,0	1089
	28	5,6	1034
	+ 13	0,6	971
$E b$	+ 33	1,3	889
	46,5	2,1	851
	87,5	5,0	829
	109	7,3	812
	149,5	10,3	756
$F [] b$	+ 27	2,0	755
	70	9,4	757
	92	14	752
	108	17	707
	133	22	698
	154	22	679
	188,5	28	631
	203,5	49	592
	225,5	41	508

Tabelle 6.

Thermokraft in der Nähe des Schmelzpunkts.

(\perp -Achse und im flüssigen Bi.) $D \perp$ zum ersten Male gemessen.

Material	t_m	Δt	$\Delta E / \Delta t$
$D \perp$	208	4,4	508
	230	4,4	446
	239	4,4	432
	248	4,4	409
	257	4,4	330
	262	4,0	203
	266,5	3,4	96
	271	3,4	39
Flüssig	275,5	3,2	11
	277	3,0	8
	288	2,6	5

Achse ist zwischen -100° und $+200^{\circ}$ fast konstant. Die Thermokraft \parallel zur Achse erreicht bei ungefähr -50° ein Maximum, um dann bis etwa $+200^{\circ}$ gleichmäßig abzunehmen.

Bei der Messung in der Nähe des Schmelzpunktes wurde dafür gesorgt, daß die Differenzen Δt immer recht klein waren, weil die Temperaturkurve hier einen recht steilen Verlauf hat. Da das Vergleichselement (Fig. 1 D) nicht recht einfach ganz an den Enden des Wismutstäbchens angebracht werden konnte, gab es leider eine zu große Temperaturdifferenz Δt an, so daß die erhaltenen Thermokräfte $\Delta E/\Delta t$ um an der Kurve für $C \perp$ anzuschließen, mit dem Faktor 1,8 multipliziert werden mußten. Da die Temperaturverhältnisse jedoch sehr konstant waren, dürfte die Kurve trotzdem die richtige sein. Jedenfalls kann ihr allgemeiner Verlauf nicht bezweifelt werden.

Man hat bei der Kurve zu berücksichtigen, daß die angegebene mittlere Temperatur den Schmelzpunkt $271,0^{\circ}$ 1) etwas überschreiten muß, ehe alles Wismut in den flüssigen Zustand übergegangen ist. Die Kurve zeigt, wie die Thermokraft beim Schmelzen schon bedeutend unterhalb des Schmelzpunktes stark abzunehmen beginnt und beim Wechseln des Aggregatzustandes stetig bleibt. Beim Erstarren zeigten sich dagegen einen Augenblick sehr große und schwankende Ausschläge im Galvanometer.

Es ist dies ein neuer Beitrag zu der immer noch strittigen Frage, ob die Thermokraft im Schmelzpunkte stetig bleibt oder nicht. Neuerlich hat Siebel²⁾ die Schmelz- und Erstarrungskurven der thermoelektromotorischen Kraft (E) unter anderem auch an Wismut ermittelt. Die Erstarrungskurve zeigt einen plötzlichen Abfall im Schmelzpunkte, was den von uns beobachteten großen, schwankenden dE/dt -Werten entspricht. Der von Siebel beobachtete Schmelzvorgang ist dagegen von dem unserigen verschieden. Siebel findet für dE/dt einen Sprung, während es bei uns beim Wechseln des Aggregatzustandes stetig abnimmt. Wir können die Nicht-

1) F. Mylius u. E. Groschuff, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 36. p. 156. 1916.

2) K. Siebel, Ann. d. Phys. 45. p. 839. 1914.

übereinstimmung nur derart erklären, daß bei dem Siebel'schen Verfahren, wobei das eine Ende des Wismutstabes immer weit unterhalb der Schmelzpunkte gehalten wurde, sich andere Zustände des Wismuts einstellen, als wenn der ganze Stab denselben Temperaturvariationen unterliegt.

Schlüsse über die Zustände des Wismuts.

Über die Ursachen der großen Abhängigkeit der Eigenschaften des Wismuts von der Vorbehandlung liegen zwei wesentlich verschiedene Auffassungen vor.

Cohen und Moesveld¹⁾ meinten, aus ihren ersten dilatometrischen Untersuchungen an Wismut auf einen Umwandlungspunkt bei 75° schließen zu können. Später fanden sie ähnliche Eigentümlichkeiten bei 87° und 96° . E. Jänecke²⁾ fand ein Umwandlungsgebiet zwischen 112° und 161° . Die Resultate gehen also ziemlich weit auseinander, und es scheint uns gar nicht notwendig, mit den genannten Verfassern auf wirkliche molekulare Umwandlungen zu schließen, um so mehr, als solche von den elektrischen Erscheinungen kaum bestätigt werden. Diese zeigen wohl eine große Abhängigkeit von der Vorgeschichte des Materiales, geben aber keinen Aufschluß über bestimmte Umwandlungspunkte.

Näherliegend und zurzeit genügend scheint uns eine andere, übrigens alte Auffassung, nach der die Variationen der Eigenschaften Spannungen im Materiale zuzuschreiben sind, die von den speziellen Druckverhältnissen beim Kristallisieren und bei der Abkühlung abhängen, und in verschiedener Weise geändert werden können. Speziell hat man z. B. die elektrische Nachwirkung³⁾ durch kleine Risse längs den Spaltebenen zu erklären versucht. Dieselbe Annahme erklärt auch sehr ungezwungen unsere Beobachtungen an dem elektrischen Widerstande oder das Vorhandensein eines temperaturkoeffizientfreien Zusatzwiderstandes senkrecht den Hauptspaltebenen, das nach genügender Pressung in dieser Richtung verschwindet.

1) E. Cohen u. A. L. Th. Moesveld, Zeitschr. f. phys. Chem. 85. p. 419. 1913.

2) E. Jänecke, Zeitschr. f. phys. Chem. 90. p. 313. 1915.

3) H. Geipel, Ann. d. Phys. 38. p. 149. 1912.

Wenn es auch kaum möglich sein wird, einen für vergleichende Messungen geeigneten Normalzustand der Wismutkristalle aufzufinden, so dürfte jedoch der von uns vorzugsweise untersuchte Zustand als der leichtest herstellbare von besonderem Interesse sein und wir beabsichtigen, an ihm noch andere Eigenschaften zu untersuchen.

Lund, Phys. Inst. d. Univ., August 1916.

(Eingegangen 12. September 1916.)

Bemerkung zu der Korrektur.

Wir sind später darauf aufmerksam geworden, daß das Kupfer, auf dem wir die Thermokräfte des Wismuts bezogen, leider verunreinigt worden ist (vielleicht durch Ziehen). Bei Vergleich mit reinem Kupfer erwies es sich als thermoelektrisch negativer (mehr nach Wismut hin liegend) als das reine. Die Korrekturen zu unseren Angaben sind in Volt $\cdot 10^{-6}$: 0,7 bei -150° , 1,4 bei -100° , 2,4 bei -50° , 2,5 bei 0° , 2,7 bei $+100^{\circ}$, 2,9 bei $+200^{\circ}$ und 3,1 bei $+300^{\circ}$.

3. Eine Vergleichung einer Druckwage von Schäffer und Budenberg mit dem offenen Standardmanometer des Physikalischen Instituts in Leiden zwischen 20 und 100 Atmosphären, als Beitrag zur Theorie der Druckwage von S. und B.¹⁾; von C. A. Crommelin und Frl. E. I. Smid.

(Hierzu Tafel III.)

§ 1. *Einleitung. Zweck der Untersuchung.* — Die vor kurzem im Physikalischen Institute in Leiden vollendete Fortsetzung der Bestimmung der Isotherme von Wasserstoff bei gewöhnlicher Temperatur von 60–100 Atmosphären²⁾ bot zugleich eine willkommene Gelegenheit dar, um überzugehen zu einer schon seit langer Zeit geplanten Vergleichung einer Druckwage von Schäffer und Budenberg mit dem offenen Manometer des Physikalischen Instituts in Leiden.

Bei den Isothermenbestimmungen von Gasen unter hohem Drucke, die in Amsterdam von Hrn. Prof. Kohnstamm mit dem Instrumentarium des Van der Waals-Fonds unternommen sind, beruhen die Druckmessungen auf Anweisungen einer Druckwage von Schäffer und Budenberg, während auch die Bestimmung der Einheit, in welcher das Gasvolumen bei den Beobachtungen unter hohem Drucke ausgedrückt wird, von den Anweisungen einer solchen Druckwage beherrscht wird. Denn dieses Normalvolumen wird von Kohnstamm und Walstra³⁾ abgeleitet aus dem Volumen, das

1) Übersetzung einer gleichnamigen Abhandlung, erschienen in den Sitzungsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam (im folgenden mit „Sitzungsber.“ zitiert), Juni 1915; Comm. Leiden Nr. 146c.

2) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin u. Frl. E. I. Smid, Sitzungsber. Amsterdam Juni 1915, Comm. Leiden Nr. 146b.

3) Ph. Kohnstamm u. K. W. Walstra, Sitzungsber. Amsterdam, Dezember 1913, Januar und April 1914, und K. W. Walstra, Inaug.-Diss. Amsterdam 1914. Diese Abhandlungen enthalten auch eine Beschreibung der Druckwage.

zufolge der Isotherme von Wasserstoff, von Schalkwijk¹⁾ in Leiden mit Hilfe des offenen Manometers von Kamerlingh Onnes²⁾ bestimmt, gehört zu dem Drucke, angegeben von der Druckwage. Um bei den Untersuchungen von Kohnstamm und Walstra die beobachteten Drucke und Volumina umzurechnen auf wirkliche Drucke und Volumina, welche nötig sind, um die Zustandsgleichung aufstellen zu können, ist deshalb eine Untersuchung über den wirklichen Druck, der mit einer bestimmten Anweisung der Druckwage von Schäffer und Budenberg übereinstimmt, unentbehrlich.

Weil das soeben genannte offene Manometer zuläßt, absolute Druckbestimmungen bis 120 Atmosphären mit großer Genauigkeit zu verrichten, konnte durch eine Vergleichung der kleinen Druckwage, welche bei den Untersuchungen von Kohnstamm und Walstra gedient hat, in jedem Falle schon das Normalvolumen, das für die Messungen bei niedrigem Drucke gilt, festgestellt werden.

Weiter war für das Erlangen eines Urteils über die Genauigkeit der Bestimmung der sehr hohen Drucke die Vergleichung der kleinen Druckwage mit dem offenen Manometer, abgesehen von der Festsetzung des Wertes der Anweisungen innerhalb des untersuchten Gebietes, schon von großem Wert. Die Notwendigkeit einer solchen Vergleichung ist vor kurzem noch von Kohnstamm und Walstra dargelegt.

Von der Theorie der Druckwage ist noch wenig bekannt und selbst dieses Wenige ist noch nicht auf einigermaßen entscheidende Weise am Experiment geprüft. Und was schließlich das schlimmste ist, die bis jetzt angestellten Versuche bestätigen die Theorie nicht. Wir haben hier besonders die Arbeit von E. Wagner³⁾ im Auge, dessen Berechnungen in bezug auf ein Amagatmanometer *mutatis mutandis* auch auf eine Druckwage anzuwenden sind. Wagner berechnet die Kraft, welche der Zylinder eines Amagatmanometers

1) J. C. Schalkwijk, Sitzungsber. Amsterdam, Dezember 1900 und Januar 1901; Comm. Leiden Nr. 67 und Inaug.-Diss. Amsterdam 1902.

2) H. Kamerlingh Onnes, Sitzungsber. Amsterdam, April 1898; Comm. Leiden Nr. 44.

3) E. Wagner, Inaug.-Diss. München 1904 und Ann. d. Phys. 15. p. 906. 1901. Vgl. auch G. Klein, Inaug.-Diss. Technische Hochschule Berlin 1909.

erfährt, zufolge der Reibung des Öls, welches durch den kleinen Zwischenraum zwischen Kolben und Zylinder strömt, und findet, daß diese Kraft in der Praxis bei genauen Messungen meistens nicht vernachlässigt werden darf. Um deshalb aus den Angaben des Manometers den richtigen Druck zu berechnen, muß man an denselben eine Korrektur anbringen; aber da im Ausdrucke für die Kraft außer Konstanten des Apparates nur der Druck als Faktor auftritt, kann man diese Korrektur an die Fläche anbringen, auf welche der Druck wirkt; der so korrigierte Querschnitt, der funktionelle Querschnitt, ist deshalb den theoretischen Betrachtungen von Wagner zufolge eine Konstante des Apparates und weicht natürlich etwas von dem wirklichen Durchschnitt ab. Wagner bestimmte mittels Versuchen bei niedrigem Drucke den funktionellen Querschnitt seines Amagatmanometers; er maß den wirklichen Querschnitt und fand — beide einander gleich! Dieses Resultat ist streitig mit der Theorie, was, angenommen, daß Wagners Versuche Vertrauen verdienen, darauf weist, daß die Theorie nicht so einfach ist und daß vielleicht noch andere Faktoren da sind, welche ihren Einfluß geltend machen auf den funktionellen Querschnitt, wodurch es dann vielleicht selbst möglich wäre, daß der funktionelle Querschnitt sich abhängig vom Drucke zeigen würde.

Um dies alles zu Klarheit zu bringen, d. h. um eine Theorie der Druckwage aufzustellen und diese Theorie am Experiment zu prüfen, soll man einerseits das Instrument vom experimentellen Gesichtspunkt aus so ausführlich wie möglich studieren, d. h. die Anweisungen des Instruments über einem möglichst großen Gebiete von Drucken vergleichen mit denen eines Standardmanometers, und andererseits die Abmessungen der Einzelteile des Instruments sehr genauen Messungen unterwerfen. Auf Grund der also erhaltenen Resultate wird es dann vielleicht möglich sein, eine mehr exakte Theorie aufzubauen.

Würde sich nun bei der Prüfung zeigen, daß der funktionelle Querschnitt in Übereinstimmung mit Wagners Theorie über dem ganzen Gebiete der Vergleichung unabhängig vom Drucke ist, so würde man Grund haben, um auch außerhalb des Gebietes, über welchem die Vergleichung mit dem offenen Manometer fortgesetzt werden könnte (nämlich oberhalb

120 Atmosphären), zu extrapolieren und deshalb bei der Anweisung von 250 Atmosphären den wirklichen Druck mit demselben funktionellen Querschnitt, wie z. B. bei 100 Atmosphären gefunden wurde, zu berechnen; die große Druckwage des van der Waals-Fonds, die ein Meßbereich von 250 bis 5000 Atmosphären hat, könnte dann bei 250 Atmosphären mit der kleinen verglichen werden und die mit beiden Instrumenten von Kohnstamm und Walstra gemessenen Drucke der Isothermen von Wasserstoff könnten dann mit Hilfe der also bestimmten funktionellen Querschnitte korrigiert werden.

Vorläufig sind wir, auch in Zusammenhang mit der Bestimmung der Isotherme bei 20°C ., die in einer anderen Abhandlung¹⁾ behandelt ist, mit der Vergleichung nur bis 100 Atmosphären gegangen. Das Gebiet von 60–100 Atmosphären lieferte schon genug Auskunft, um eine weitere systematische Untersuchung von verschiedenen Fragen über die Theorie der Druckwage wünschenswert zu machen, eine Untersuchung, bei welcher aber die Leidener Apparate nicht nötig sind. Mit der Fortsetzung der Bestimmungen, die bei steigendem Drucke immer schwerer werden, haben wir gemeint warten zu können, bis diese Untersuchung vollendet sein wird.

§ 2. *Experimentelle Methode.* — Eine gleichzeitige Ablesung des offenen Manometers und der Druckwage war nicht möglich. Bei der Druckwage ist nämlich der Druck in den Ölleitungen nur dann konstant, wenn der Kolben mit den Gewichten frei dreht und dies dauert nicht länger als höchstens ein paar Minuten; ist die Rotationsbewegung fast zur Ruhe gekommen, und bringt man den Kolben mit der Hand wieder in Drehung, dann übt man, wie vorsichtig man es auch tut, auf den Kolben kleine vertikale Kräfte aus, die sich als Druckstöße in den Leitungen fortpflanzen und das Druckgleichgewicht zerstören. Nun fordern die Ablesungen am offenen Manometer eine viel längere Zeit als die paar Minuten, die die sich selber überlassene Druckwage uns zur Verfügung stellt, ja, wenn alle Röhren unter Druck stehen, dauert eine solche Ablesung, ausgeführt von zwei zusammenwirkenden Beobachtern, ungefähr $\frac{3}{4}$ Stunden.

1) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin und Fr. E. I. Smid, l. c.

Mit einer gleichzeitigen Ablesung von Druckwage und offenem Manometer waren deshalb fast unüberwindliche Schwierigkeiten verbunden, so daß wir beschlossen, die Vergleichung auszuführen mit Vermittlung der beiden geschlossenen Wasserstoffmanometer des Leidener Instituts, M_{60} und M_{120} , von welchen das erste ein Meßbereich von 20—60 Atmosphären, das zweite ein Meßbereich von 60—120 Atmosphären besitzt. Wir wollen hier schon darauf hinweisen, daß diese Weise von Arbeiten der beabsichtigten Genauigkeit in keiner einzigen Hinsicht geschadet hat, sowie sich außerdem aus der Diskussion im folgenden Paragraph zeigen wird.

Die Figur auf Taf. III stellt das offene Manometer OM , die beiden geschlossenen Manometer M_{60} und M_{120} und die Druckwage DB mit ihrer Ölpressepumpe OP nebst den Leitungen und Hähnen vor, durch welche die verschiedenen Instrumente miteinander in Verbindung gebracht werden. Die Einrichtung und Art der Bearbeitung der verschiedenen Manometer ist schon öfters beschrieben und abgebildet, so daß wir darauf jetzt nicht näher einzugehen brauchen.¹⁾

Eine kleine Komplikation verursachte noch das Überbringen des Druckes von den mit Öl gefüllten Leitungen der Druckwage auf die Leitungen der Leidener Manometer, in welchen für das Überbringen des Druckes immer zusammengepreßte Luft gebraucht wird. Das Überbringen geschah mittels des Stahlrohres D , mit dem Visierglase P_3 . Das Niveau des Öls darin konnte mit Hilfe der Ölpumpe OP immer passend auf richtiger Höhe gehalten werden. Als diese Einrichtung einige Zeit in Gebrauch war, zeigte es sich, daß kleine Druckänderungen im Öl, verursacht durch das Auflegen von kleinen Gewichten auf den Kolben, nur sehr langsam und träge nach

1) Offenes Standardmanometer: H. Kamerlingh Onnes, Sitzungsber. Amsterdam, Oktober 1898; Comm. Leiden Nr. 44, und J. C. Schalkwijk, Inaug.-Diss. Amsterdam 1902. H. Kamerlingh Onnes, C. Dorsman u. G. Holst, Sitzungsber. Amsterdam Juni 1915; Comm. Leiden Nr. 146a. — Manometer M_{60} : H. Kamerlingh Onnes u. H. H. F. Hyndman, Sitzungsber. Amsterdam März 1902; Comm. Leiden Nr. 78, § 17. H. Kamerlingh Onnes u. C. Braak, Sitzungsber. Amsterdam Dezember 1906; Comm. Leiden Nr. 97a, § 3. — Manometer M_{120} : H. Kamerlingh Onnes, C. Dorsman u. G. Holst, l. c. H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin u. Fr. E. I. Smid, l. c. — Druckwage: Ph. Kohnstamm u. K. W. Walstra, l. c.

den Manometern M_{60} und M_{120} überbracht wurden; es war deshalb wünschenswert, den Druck im Öl der Druckwage mittels Röhren, ausschließlich mit Flüssigkeit gefüllt, auf das Quecksilber der geschlossenen Manometer zu überbringen und so die Luftleitungen auszuschalten. Diese Einrichtung konnte bequem an M_{120} angebracht werden, indem man an Hahn K_{23} (der eigentlich dazu dient, um das Manometer beim Montieren mit Quecksilber zu füllen) ein Stahlrohr mit Visierglas P_1 anschraubt. Hinter diesem Visierglase wird ein zweites Visierglas P_2 montiert, und dieses zweite Visierglas stand in Verbindung mit den Ölleitungen. Vom Quecksilber unten im ersten Visierglase auf das Öl oben im zweiten Visierglase wird der Druck mittels Glyzerin überbracht.

Wir erzeugten nun den Druck erst auf die gewöhnliche Weise mit zusammengepreßter Luft; öffnete man dann den Hahn K_{30} und schloß man die Hähne K_{27} und K_{28} , dann hatte man eine Drucküberbringung ausschließlich mittels Flüssigkeiten. Das Weiteraufführen des Druckes geschah mit Hilfe der Ölpumpe. Diese Einrichtung entsprach vollkommen den Erwartungen; Druckänderungen von $\frac{1}{10000}$ im Öl der Druckwage wurden jetzt augenblicklich durch M_{120} angewiesen.

§ 3. *Genauigkeit.* — Damit man sich ein Urteil bilden könne über die zu erwartende Genauigkeit, dürfen hier einige Angaben folgen über die absolute und relative Genauigkeit der Anweisungen der verschiedenen Instrumente.

Das offene Manometer gibt, unter der Bedingung, daß es nicht leckt, und bei sorgfältig konstant gehaltener Zimmertemperatur, mit Sicherheit eine, natürlich absolute, Genauigkeit von 0,01 Proz.

Das Manometer M_{60} garantiert, wenn man bei der Ablesung von 0,1 mm sicher ist (und dies kann ohne Zweifel erreicht werden),

bei 20 Atmosphären eine Genauigkeit von 0,008 Proz.,
„ 60 „ „ „ „ 0,020 „

Für das Manometer M_{120} gelten die folgenden Zahlen:

bei 65 Atmosphären eine Genauigkeit von 0,007 Proz.,
„ 100 „ „ „ „ 0,016 „

Die für diese beiden Manometer angegebene Genauigkeit ist nicht nur relativ, sondern auch für eine große Anzahl Punkte absolut, weil beide Instrumente bei jenen Punkten direkt mit dem offenen Manometer verglichen sind. Was die Druckwage betrifft, so war weder über die absolute noch über die relative Genauigkeit beim Anfange unserer Untersuchung etwas mit Sicherheit bekannt. Nur hatte man feststellen können, daß die Empfindlichkeit der Einstellung in der Nähe des eingestellten Druckes sehr groß ist und gewiß wohl 0,02 bis 0,01 Proz. beträgt. War z. B. die Druckübertragung mit Flüssigkeiten in Wirkung und war die Druckwage belastet mit 65 kg, dann konnte man eine Zufügung von 10 g an die Belastung mit vollkommener Sicherheit auf M_{120} wahrnehmen. Die Ergebnisse über die Genauigkeit der Druckwage, die wir jetzt aus unserer Untersuchung bekommen haben, werden bei der Diskussion der Resultate zur Sprache kommen.

§ 4. *Die Berechnungen.* — Die Berechnungen der Anweisungen des offenen Manometers sind im Prinzip sehr einfach; auf die verschiedenen Korrekturen muß aber die nötige Aufmerksamkeit verwendet werden, wenn man der Genauigkeit von 0,01 Proz. sicher sein will. Diese Korrekturen sind von Schalkwijk in seiner Inauguraldissertation ausführlich diskutiert worden, so daß wir uns hier auf ein paar Bemerkungen beschränken können. Die Korrektur infolge des Gewichtes der Säulen zusammengepreßter Luft, welche dazu dienen, um den Druck des einen Rohres auf das andere überzubringen, wird bei den höheren Drucken ziemlich bedeutend. Wir hätten statt Luft, Wasserstoff gebrauchen können¹⁾, was einen doppelten Vorteil bedeutet haben würde: erstens wird dadurch die Korrektur mehr als zehnmal kleiner, und zweitens ist die Isotherme von Wasserstoff bei 20° jetzt bis 100 Atmosphären mit großer Genauigkeit bekannt²⁾, so daß

1) Diese Methode wurde schon 1898 von H. Kamerlingh Onnes empfohlen; vgl. Sitzungsber. Amsterdam Oktober 1898, Comm. Leiden Nr. 44.

2) J. C. Schalkwijk, Sitzungsber. Amsterdam, Dezember 1900 und Januar 1901; Comm. Leiden Nr. 67; Sitzungsber. Amsterdam Mai und Juni 1901; Comm. Leiden Nr. 70; Inaug.-Diss. Amsterdam 1902. H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin u. Fr. E. I. Smid, Sitzungsber. Amsterdam Juni 1915; Comm. Leiden Nr. 146b. Für die Temperatur-

die Korrektur mit großer Genauigkeit berechnet werden kann. Wohl muß man dann über sehr reinen Wasserstoff verfügen, um sicher vom spezifischen Gewicht sein zu können, aber durch Destillation wird im Kryogenen Institut so vollkommen reiner Wasserstoff bereitet, daß der relativ große Einfluß von Spuren hinzugemischter Luft auf das spezifische Gewicht nicht gefürchtet zu werden braucht. Wir haben uns aber davon überzeugt, daß es für Drucke bis 100 Atmosphären noch nicht nötig war, zu dieser Komplikation überzugehen, und wir haben es deshalb bevorzugt, die Korrektur für Luft zu berechnen.

Dafür standen zu Gebote die Isothermen von Amagat¹⁾, welche von Brinkman²⁾ und von Kamerlingh Onnes³⁾ auf verschiedene Weise durch Gleichungen dargestellt sind, mit welcher Hilfe Korrekturstabellen berechnet wurden. Die Korrekturen, berechnet nach beiden Methoden, stimmen selbst bei 100 Atmosphären noch bis auf 0,5 mm überein. Die Resultate beweisen, so wie aus der Fortsetzung sich zeigen wird, daß auf diese Weise die Korrektur mit genügender Genauigkeit genähert wird.

Die Korrektur für die Zusammendrückbarkeit des Quecksilbers bleibt wohl, selbst bis 100 Atmosphären, gering, aber kommt doch in Betracht. Auch für diese Korrektur haben wir eine Tabelle berechnet, welcher der Zusammendrückbarkeitskoeffizient 0,00000392 nach Amagat zugrunde gelegt ist.

Die Korrektur infolge des Strömens des Quecksilbers durch die Röhre, ausführlich von Schalkwijk diskutiert, brauchte nicht angebracht zu werden: das Quecksilber stand vollkommen still. Infolge der an die Glasröhren gelöteten Stahlröhrchen, der Fiberpackungen und des Öls, in welches alle Verbindungen getaucht waren⁴⁾, ist es uns gelungen,

korrektur vergleiche man die empirische Zustandsgleichung von H. Kamerlingh Onnes in der Abhandlung von J. P. Dalton, Sitzungsber. Amsterdam, März 1909; Comm. Leiden Nr. 109a.

1) E. H. Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) 29, Juni u. August 1893.

2) C. H. Brinkman, Inaug.-Diss. Amsterdam 1904.

3) Vgl. J. P. Dalton, Sitzungsber. Amsterdam, April 1909, § 2; Comm. Leiden Nr. 109c.

4) Die Ölröge sind auf der etwas schematisch gehaltenen Figur fortgelassen. Für einige der erwähnten Verbesserungen vgl. H. Kamerlingh Onnes, Sitzungsber. Amsterdam, Mai 1905; Comm. Leiden Nr. 94b.

das offene Manometer selbst bei 100 Atmosphären vollkommen frei von Lecken zu erhalten, während außerdem die Zimmertemperatur so gut konstant gehalten wurde (Dampfheizung, verbesserte Beleuchtung mit Metalldrahtlampen, die sehr wenig Wärme geben usw.), daß selbst bei den sehr zeitraubenden Ablesungen bei den höheren Drucken von Strömung fast nichts zu spüren war.

Die Korrekturen für die Kapillardepression sind nicht angebracht worden. Eine Diskussion lehrte, daß die algebraische Summe dieser Korrekturen keinen Einfluß auf die beabsichtigte Genauigkeit haben würde, besonders wenn durch Klopfen gegen die Röhre für schöne kugelförmige Menisci gesorgt wurde.¹⁾ Das Anbringen würde große Schwierigkeiten mit sich gebracht haben, weil bei der angewendeten Beleuchtungsweise die Höhen der Menisci mittels der Theodoliten, mit welchen die Menisci abgelesen werden, nicht zu bestimmen waren. In bezug auf die weiteren Korrekturen ist nichts Besonderes zu bemerken.

Die Berechnung der Anweisungen der Manometer M_{60} und M_{120} gibt ebensowenig Anlaß zu Bemerkungen. Was die Belastung der Druckwage betrifft, muß man beachten, daß diese aus dem Totalgewicht von Kolben und aufgelegten Gewichten besteht, vermehrt mit dem atmosphärischen Drucke, multipliziert mit dem funktionellen Querschnitt. Die Atmosphäre in Leiden ist 75,9488 cm Quecksilber gleichgesetzt, während weiter für 1 Atmosphäre 1,0336 kg pro Quadratcentimeter gestellt ist.

§ 5. *Messungen und Resultate.* — Wie in § 2 auseinander gesetzt wurde, bestanden die Messungen: 1. in einer Vergleichung von M_{60} und M_{120} mit dem offenen Manometer; 2. in einer Vergleichung der Druckwage mit M_{60} und M_{120} .

Wir werden zuerst die Messungen von 20–60 Atmosphären, ausgeführt mit Hilfe von M_{60} , besprechen.

Bevor wir dazu übergangen, M_{60} mit der Druckwage zu vergleichen, haben wir uns durch eine Vergleichung von M_{60} mit dem offenen Manometer²⁾ davon überzeugt, daß die An-

1) Auch hier beweisen die Resultate, daß die Behauptung wahr ist.

2) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin und Fr. E. I. Smid, l. c.

weisungen des geschlossenen Manometers das Vertrauen, welches sie sich in den letzten Jahren immer erfreut hatten, wirklich noch verdienten. Wie in der zitierten Mitteilung erwähnt wird, gab diese Vergleichung als Resultat; daß das geschlossene Manometer, seit der letzten Vergleichung¹⁾ vor einigen Jahren, sich gar nicht geändert hatte.

Die Vergleichung von M_{60} mit der Druckwage geschah nun wie folgt. Es wurde eingestellt auf einen bestimmten Druck, die Druckwage wurde dann in Drehung gesetzt, und so lange gewartet, bis die Quecksilbersäule in M_{60} nicht mehr ihren Stand änderte. Die Druckübertragung geschah von Luft auf Öl, und weil die Druckstöße beim In-Drehung-Setzen und -Halten der Druckwage sich nur sehr träge nach M_{60} fortpflanzten, gelang es uns, an der Druckwage zu drehen, ohne daß einige Änderung im Stande der Quecksilbersäule gemerkt werden konnte. Blieb die Quecksilbersäule nun geraume Zeit konstant, dann wurde eine Ablesung getan.

Tabelle I gibt die Resultate von zwei Reihen Messungen. Bei den Messungen am 22. Juni war die Druckwage wieder sorgfältig zentriert, weil wir meinten, daß die Zentrierung zu wünschen übrig gelassen hatte.

Die in dieser Tabelle mit * bezeichneten Beobachtungen sind berechnet mit Hilfe der Isothermen von Schalkwijk und bei diesen Beobachtungen hat das geschlossene Manometer deshalb nicht nur als Indikator gedient. Die Übereinstimmung zwischen beiden Arten von Wahrnehmungen zeigte sich aber so ausgezeichnet, daß man die direkte Feststellung des Druckes mit dem offenen Manometer für die mit * bezeichneten Punkte unterlassen durfte.

Wir gehen jetzt über zu den Messungen von 60–100 Atmosphären, ausgeführt mit Hilfe von M_{120} .

Bei diesem Instrumente konnten wir nicht so wie bei M_{60} über die Verifikation der Einstellungen mittels der Isothermen und der Kalibration verfügen, da die Eichung vor einigen Jahren²⁾ die wünschenswerte Genauigkeit nicht völlig geliefert zu haben schien, auf Grund dessen sie zugleich mit diesen Bestimmungen wiederholt und ausgebreitet und durch eine

1) H. Kamerlingh Onnes, C. Dorsman u. G. Holst, l. c. § 3, Schluß.

2) Ibid. § 4.

Tabelle I.

Vergleichung der Druckwage mit M_{60} .

Datum	Nr.	Belastung der Druck- wage in kg	M_{60} in kg pro qcm, vermin- dert mit dem atmosphäri- schen Drucke	Reziproker funktioneller Querschnitt in qcm	Funk- tioneller Quer- schnitt in qcm
6. Febr. 1915	I	21,650	21,729	1,0036	0,9964
	IX*	25,650	25,744	36	64
	II*	31,410	31,520	35	65
	VIII*	36,000	36,121	33	67
	III	41,760	41,895	32	68
	VII*	46,050	46,188	30	70
	IV*	50,130	50,269	28	72
	VI*	55,710	55,848	25	75
	V	61,300	61,445	24	76
22. Juni 1915	VIII*	25,000	25,089	1,0035	0,9965
	I*	30,000	30,086	28	72
	VII*	35,000	35,092	26	74
	II	40,000	40,114	28	72
	VI*	45,000	45,098	22	78
	III*	50,000	50,120	24	76
	V *	55,000	55,112	20	80
	IV	60,000	60,112	19	81

neue Eichung ersetzt wurde. Wir haben in diesem Gebiete die Vergleichung denn auch bei einer großen Anzahl Punkte ausgeführt. Die dabei gebrauchten Einstellungen konnten nach der Vollendung dieser Untersuchung¹⁾ jede für sich geprüft werden durch Vergleichung mit der aus den sämtlichen Punkten abgeleiteten Isothermen. Wäre das Manometer mit einem anderen Gase oder mit einer willkürlichen Gasmischung gefüllt gewesen, seinen Dienst als Vermittler zwischen Druckwage und offenem Manometer hätte es darum ebensogut leisten können.

In Tabelle II teilen wir die Resultate der Vergleichung der Druckwage mit M_{120} für ein Gebiet von 60—100 Atmosphären mit. Die Messungen am 27. und 29. März und am 24. Juni sind ausgeführt mit der Drucküberbringung Gas—Flüssigkeit (ebenso wie die Messungen mit M_{60}), die am 23. und 24. April und am 18. und 19. Juni dagegen mit Hilfe des später angebrachten Flüssigkeitssystems Quecksilber—Glyzerin—Öl, so wie dies in einem der vorigen Paragraphen beschrieben ist.

1) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin u. Fr. E. I. Smid, l. c.

Tabelle II.

Vergleichung der Druckwage mit M_{120} .

Datum	Nr.	Belastung der Druck- wage in kg	M_{120} in kg pro qcm, ver- mindert mit dem atmo- sphär. Drucke	Reziproker funktioneller Querschnitt in qcm	Funk- tioneller Quer- schnitt in qcm
27. März 1915	I	67,000	67,143	1,0021	0,9979
	II	71,050	71,210	22	78
	III	75,000	75,147	19	81
	IV	79,650	79,865	27	73
	V	83,500	83,729	27	73
	VI	87,550	87,795	28	72
	VII	91,050	91,291	26	74
	VIII	95,550	95,790	25	75
	IX	99,500	99,815	31	69
	X	103,500	103,884	37	63
29. März 1915	X	67,200	67,329	1,0019	0,9981
	IX	71,100	71,236	19	81
	VIII	75,100	75,248	19	81
	VII	79,600	79,776	22	78
	VI	83,050	83,329	33	67
	V	87,550	87,745	22	78
	IV	91,050	91,292	26	74
	III	95,450	95,694	25	75
	II	99,350	99,667	32	68
	I	103,350	103,686	32	68
24. Juni 1915	II	75,000	75,187	1,0025	0,9975
	VII	80,000	80,216	27	73
	III	85,000	85,234	27	73
	VIII	90,000	90,271	30	70
	IV	95,000	95,298	31	69
	IX	100,000	100,362	36	64
23. April 1915	I	67,000	67,174	1,0026	0,9974
	II	71,000	71,212	29	71
	III	75,000	75,217	29	71
	IV	79,000	79,239	30	70
	V	83,000	83,268	32	68
	VI	87,000	87,263	30	70
	VII	91,000	91,294	32	68
	VIII	95,000	95,338	35	65
	IX	99,000	99,383	38	62
	X	103,000	103,406	39	61
24. April 1915	X	67,000	67,174	1,0026	0,9974
	IX	71,000	71,180	26	74
	VIII	75,000	75,229	30	70
	VII	79,000	79,259	32	68
	VI	83,000	83,272	32	68
	V	87,000	87,278	32	68

Tabelle II (Fortsetzung).

Datum	Nr.	Belastung der Druck- wage in kg	M_{120} in kg pro qcm, ver- mindert mit dem atmo- sphär. Drucke	Reziproker funktioneller Querschnitt in qcm	Funk- tioneller Quer- schnitt in qcm
24. April 1915	IV	91,000	91,313	1,0034	0,9966
	III	95,000	95,328	34	66
	II	99,000	99,395	39	61
	I	103,000	103,423	41	59
18. Juni 1915	III	70,000	70,185	1,0026	0,9974
	IV	80,000	80,263	32	68
	V	90,000	90,295	32	68
	VI	100,000	100,390	39	61
18. Juni 1915	X	70,000	70,181	1,0025	0,9975
	IX	80,000	80,256	32	68
	VIII	90,000	90,301	33	67
	VII	100,000	100,360	36	64
19. Juni 1915	III	70,000	70,179	1,0025	0,9975
	IV	80,000	80,247	30	70
	V	90,000	90,286	31	69
	VI	100,000	100,375	37	63

§ 6. *Diskussion.* Aus den Resultaten aller Messungen, wie sie zusammengefaßt sind in obenstehenden Tabellen, zeigt sich das Folgende:

1. Der funktionelle Querschnitt ist nicht unabhängig vom Drucke, doch beim Steigen des Druckes über 20 Atmosphären nimmt er zu, um durch ein Maximum bei etwa 70 Atmosphären zu gehen, und dann wieder und wohl stärker abzunehmen, soweit die Vergleichung ausgedehnt wurde. Die größte Abweichung war 0,0020.

2. Bei wiederholten Bestimmungen wurde für den funktionellen Querschnitt nicht immer derselbe Wert gefunden; die größte Abweichung beträgt hier ungefähr 0,0005.

3. Der funktionelle Querschnitt unterscheidet sich vom geometrischen Querschnitt, wie dieser von Schäffer und Budenberg angegeben wird (1 qcm), und wohl ungefähr 0,0030.

4. Die Empfindlichkeit der Druckwage, $\frac{1}{10000}$, übertrifft deshalb weit ihre Genauigkeit. Um diese zu dem Werte der Empfindlichkeit aufzuführen, muß die Theorie des Instruments entwickelt und ein Mittel gefunden werden, um konstante

Anweisungen zu erhalten innerhalb der Grenzen der Empfindlichkeit. Wahrscheinlich muß eine Druckwage, um diese Genauigkeit zu erreichen, wohl immer unmittelbar oder mittelbar mit einem offenen Manometer verglichen werden.

5. Von den Drucken, gemessen mit einer nicht untersuchten Druckwage von Schäffer und Budenberg, kann man, angenommen, daß der Kolben keinen größeren Abmessungsfehler hat als 0,1 Promille, vorläufig auf nicht mehr als $\frac{1}{400}$ sicher sein.

Schließlich sagen wir Hrn. Prof. Kamerlingh Onnes in Leiden und Hrn. Prof. Kohnstamm in Amsterdam herzlichst Dank für ihr fortdauerndes Interesse an unserer Arbeit.

Leiden, Physikalisches Institut der Reichs-Universität,
im Juni 1915.

(Eingegangen 12. Oktober 1916.)

4. *Vergleichung der Druckwage des Van 't Hoff-Laboratoriums zu Utrecht mit denen des Van der Waals-Fonds zu Amsterdam*¹⁾; von E. I. Hoogenboom-Smid.

Einleitung. In der ersten Hälfte des Jahres 1915 hat eine Vergleichung der kleinen Druckwage zu Amsterdam mit dem offenen Standardmanometer zu Leiden stattgefunden von 20–100 Atmosphären.²⁾ Das Resultat hiervon war, daß der funktionelle Durchschnitt sich nicht dem wirklichen gleich zeigte; es wurde selbst ein konstanter Wert nicht gefunden, sondern ein Wert abhängig vom Drucke.

Damit man doch genaue Druckbestimmungen mit einer Druckwage machen könne, ist es nötig, der Theorie des Instrumentes nachzuforschen. Es war dabei interessant, zu untersuchen, ob die Abweichungen des funktionellen Durchschnittes von dem wirklichen bei verschiedenen Druckwagen denselben Gang zeigen. Einigermassen würde man hierüber ein Urteil bekommen können durch die Vergleichung der Druckwage von Prof. Cohen zu Utrecht mit der kleinen und großen Druckwage des Instrumentariums des Van der Waals-Fonds. Diese Vergleichung wurde ausgeführt in den Monaten Oktober, November und Dezember 1915 im Laboratorium des Van der Waals-Fonds zu Amsterdam.

Untersuchung. Die Druckwage zu Utrecht ist äußerlich der kleinen zu Amsterdam ganz ähnlich; nur ist der wirkliche Durchschnitt nicht 1, sondern $\frac{1}{4}$ ccm, so daß ihr Meßgebiet bis 1000 Atmosphären reicht. Die Vergleichung der funktionellen Durchschnitte der beiden Apparate wurde ausgeführt, indem man eine mit Wasserstoff gefüllte Meßröhre,

1) Übersetzung einer gleichnamigen Abhandlung ist erschienen in den Sitzungsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam, September 1916.

2) C. A. Crommelin en Mej. E. I. Smid, Eene vergelijking van een drukbalans van S. en B. enz., Verslagen Kon. Akad. van Wet., Amsterdam, 24. p. 358. 1915/16. Vgl. auch die vorhergehende Mitteilung.

wie sie von Walstra in seiner Probearbeit beschrieben ist¹⁾, als Indikator gebraucht. Die Meßröhre wurde dann nacheinander in Verbindung gebracht mit den zwei zu vergleichenden Druckwagen, während die Temperatur des Gases so gut wie möglich auf 25° konstant gehalten wurde. Die Resultate der Messungen bei verschiedenen Drucken für verschiedene Füllungen in verschiedenen Meßröhren auf die angegebenen Daten sind aufgenommen in den folgenden zwei Tabellen.

Tabelle I.

Verhältnis der funktionellen Durchschnitte der kleinen Druckwage zu Amsterdam und der zu Utrecht.

Belastung in kg	14. Okt.	15. Okt.	16. Okt.	19. Okt.	20. Okt.	27. Okt.	16. Nov.	18. Nov.
88						3,993		
109	3,993		3,993					
147							3,993	
151	3,993	3,992	3,993					3,992
167						3,991		
195	3,993	3,991	3,991					
204							3,991	
223								3,992
242	3,990	3,991	3,991	3,991	3,990			

Bemerkungen.

1. Es zeigt sich, daß die Höhe des Stempels einen merklichen Einfluß auf den Druck hat. Dieser Einfluß konnte in Leiden nicht konstatiert werden bei expreß dazu gemachten Experimenten.

2. Die Drehungsgeschwindigkeit hat einen merklichen Einfluß auf den Druck.

3. Die Drehungsrichtung hat einen großen Einfluß auf den Druck bei der Druckwage aus Utrecht. Der Unterschied beträgt ungefähr 60 g bei einer Belastung von 60 kg. Bei geringer Belastung kann man die Druckwage aus Utrecht nur in einer Richtung drehen. Darum ist bei der Vergleichung

1) K. W. Walstra, Dissertation, Amsterdam 1914. Vgl. auch: Verlagen Kon. Akad. van Wet., Amsterdam, 22. p. 689. 1913/14.

mit der kleinen Druckwage zu Amsterdam immer nur die Belastung bei Rechtsdrehung in Rechnung gebracht. Bei der Vergleichung mit der großen Druckwage am 19. und 20. Oktober ist die Druckwage aus Utrecht auch nur entweder links oder rechts gedreht, weil damals diese Eigentümlichkeit noch nicht entdeckt war. Darauf ist für die Belastung immer das Mittel genommen aus den Werten bei Links- und Rechtsdrehung.

Resultat. Es zeigt sich, daß das Verhältnis der funktionellen Durchschnitte fast konstant ist, in Erwägung gezogen die Ungenauigkeit, welche der Erfolg ist von den in obenstehenden Bemerkungen genannten Eigentümlichkeiten. Nur scheinen die Verhältniszahlen bei der Vergleichung der Druckwage zu Utrecht mit der kleinen zu Amsterdam einen geringen systematischen Gang zu zeigen.

Es wird beabsichtigt, im Laboratorium zu Amsterdam die Untersuchung der Druckwage fortzusetzen, zunächst auf diese Weise, daß der Wert des funktionellen Durchschnittes für sehr verschiedene Werte der Belastung bestimmt werden wird. Das dazu nötige Instrumentarium wird aber während des Krieges höchstwahrscheinlich nicht zu erhalten sein.

Schließlich wünsche ich Prof. Kohnstamm Dank zu sagen, unter dessen Leitung ich diese Untersuchung gemacht habe.

Deventer, September 1916.

(Eingegangen 12. Oktober 1916.)

**5. Über Friedrich Kottlers Abhandlung
„Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die
Gravitation“¹⁾;
von A. Einstein.**

Unter den Arbeiten, welche sich kritisch mit der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigen, sind besonders diejenigen Kottlers bemerkenswert, denn dieser Fachgenosse ist wirklich in den Geist der Theorie eingedrungen. Mit der letzten dieser Arbeiten will ich mich hier auseinandersetzen.

Kottler behauptet, ich hätte das von mir aufgestellte „Äquivalenzprinzip“, durch welches ich die Begriffe der „trägen Masse“ und der „schweren Masse“ zu einem einheitlichen Begriffe zu vereinigen strebte, in meinen späteren Arbeiten wieder aufgegeben. Diese Meinung muß darauf beruhen, daß wir beide nicht dasselbe als „Äquivalenzprinzip“ bezeichnen; denn nach meiner Auffassung ruht meine Theorie ausschließlich auf diesem Prinzip. Deshalb sei folgendes wiederholt:

1. *Der Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie.* Ein raumzeitlich endliches Gebiet sei frei von einem Gravitationsfelde, d. h. es sei möglich, ein Bezugssystem K („Galileisches System“) aufzustellen, relativ zu welchem für das genannte Gebiet folgendes gilt. Koordinaten seien in bekannter Weise mit dem Einheitsmaßstab, Zeiten mit der Einheitsuhr unmittelbar meßbar, wie dies in der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt zu werden pflegt. In bezug auf dieses System bewege sich ein isolierter materieller Punkt geradlinig und gleichförmig, wie es von Galilei vorausgesetzt wurde.

2. *Äquivalenzprinzip.* Ausgehend von diesem Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie kann man sich fragen, ob

1) Ann. d. Phys. 50. p. 955. 1916.

ein in dem betrachteten Gebiete relativ zu K gleichförmig beschleunigter Beobachter seinen Zustand als beschleunigt auffassen muß, oder ob ihm nach den (angenähert) bekannten Naturgesetzen eine Auffassung übrig bleibt, vermöge derer er seinen Zustand als „Ruhe“ deuten kann. Präziser ausgedrückt: Erlauben uns die in gewisser Annäherung bekannten Naturgesetze ein in bezug auf K gleichförmig beschleunigtes Bezugssystem K' als ruhend zu betrachten? Oder etwas allgemeiner: Läßt sich das Relativitätsprinzip auch auf relativ zueinander (gleichförmig) beschleunigte Bezugssysteme ausdehnen? Die Antwort lautet: Soweit wir die Naturgesetze wirklich kennen, hindert uns nichts daran, das System K' als ruhend zu betrachten, wenn wir relativ zu K' ein (in erster Annäherung homogenes) Schwerfeld als vorhanden annehmen; denn wie in einem homogenen Schwerfeld, so auch in bezug auf unser System K' fallen alle Körper unabhängig von ihrer physikalischen Natur mit derselben Beschleunigung. Die Voraussetzung, daß man in aller Strenge K' als ruhend behandeln dürfe, ohne daß irgendein Naturgesetz in bezug auf K' nicht erfüllt wäre, nenne ich „Äquivalenzprinzip“.

3. *Das Schwerfeld nicht nur kinematisch bedingt.* Man kann die vorige Betrachtung auch umkehren. Sei das mit dem oben betrachteten Schwerfelde ausgestattete System K' das ursprüngliche. Dann kann man ein neues, gegen K' beschleunigtes Bezugssystem K einführen, mit Bezug auf welches sich (isolierte) Massen (in dem betrachteten Gebiete) geradlinig gleichförmig bewegen. Aber man darf nun *nicht* weitergehen und sagen: Ist K' ein mit einem *beliebigen* Gravitationsfeld versehenes Bezugssystem, so ist stets ein Bezugssystem K auffindbar, in bezug auf welches sich isolierte Massen geradlinig gleichförmig bewegen, d. h. in bezug auf welches kein Gravitationsfeld existiert. Die Absurdität einer solchen Voraussetzung liegt auf der Hand. Ist das Gravitationsfeld in bezug auf K' zum Beispiel das eines ruhenden Massenpunktes, so läßt sich dieses Feld für die ganze Umgebung des Massenpunktes gewiß durch kein noch so feines Transformationskunststück hinwegtransformieren. Man darf also keineswegs behaupten, das Gravitationsfeld sei gewissermaßen rein kinematisch zu erklären; eine „kinematische, nicht dynamische Auffassung der Gravitation“ ist nicht möglich. Durch bloße Trans-

formation aus einem Galileischen System in ein anderes durch Beschleunigungstransformationen lernen wir also nicht beliebige Gravitationsfelder kennen, sondern solche ganz spezieller Art, welche aber doch denselben Gesetzen genügen müssen wie alle anderen Gravitationsfelder. Dies ist nur wieder eine andere Formulierung des Äquivalenzprinzips (speziell in seiner Anwendung auf die Gravitation).

Eine Gravitationstheorie verletzt also das Äquivalenzprinzip in dem Sinne, wie ich es verstehe, nur dann, wenn die Gleichungen der Gravitation in *keinem* Bezugssystem K' erfüllt sind, welches relativ zu einem galileischen Bezugssystem ungleichförmig bewegt ist. Daß dieser Vorwurf gegen meine Theorie mit *allgemein* kovarianten Gleichungen nicht erhoben werden kann, ist evident; denn hier sind die Gleichungen bezüglich eines jeden Bezugssystems erfüllt. Die Forderung der allgemeinen Kovarianz der Gleichungen umfaßt die des Äquivalenzprinzips als ganz speziellen Fall.

4. Sind die Kräfte des Gravitationsfeldes „reale“ Kräfte? Kottler rügt es, daß ich in den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

das zweite Glied als den Ausdruck des Einflusses des Schwerfeldes auf den Massenpunkt, das erste Glied gewissermaßen als den Ausdruck der Galileischen Trägheit interpretiere. Dadurch würden „wirkliche Kräfte des Schwerfeldes“ eingeführt, was dem Geiste des Äquivalenzprinzips nicht entspreche. Hierauf antworte ich, daß jene Gleichung als Ganzes allgemein kovariant, also jedenfalls der Äquivalenzhypothese gemäß ist. Die von mir eingeführte Benennung der Teile ist prinzipiell bedeutungslos und einzig dazu bestimmt, unseren physikalischen Denkgewohnheiten entgegenzukommen. Dies gilt auch insbesondere von den Begriffen

$$\Gamma_{\alpha\beta}^r = - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ r \end{matrix} \right\}$$

(Komponenten des Gravitationsfeldes) und t_σ^r (Energiekomponenten des Gravitationsfeldes). Die Einführung dieser Benennungen ist prinzipiell unnötig, erscheint mir aber für

die Aufrechterhaltung der Kontinuität der Gedanken wenigstens einstweilen nicht wertlos; deshalb habe ich diese Größen eingeführt, trotzdem ihnen kein Tensorcharakter zukommt. Dem Äquivalenzprinzip aber ist stets Genüge geleistet, wenn die Gleichungen kovariant sind.

5. Es ist wahr, daß ich die allgemeine Kovarianz der Gleichungen durch das Aufgeben der gewöhnlichen Zeitmessung und der Euklidischen Raummessung habe erkaufen müssen. Kottler glaubt ohne dies Opfer auskommen zu können. Aber bereits im Falle des von ihm betrachteten im Bornschen Sinne relativ zu einem Galileischen System beschleunigten Systems K' muß man auf die gewöhnliche Zeitmessung verzichten. Da ist vom Standpunkt der Relativitätstheorie der Gedanke schon naheliegend, daß auch die gewöhnliche Raummessung aufgegeben werden müsse. Von dieser Notwendigkeit wird sich Hr. Kottler sicherlich selbst überzeugen, wenn er die ihm vorschwebenden theoretischen Pläne allgemein durchzuführen suchen wird.

Oktober 1916.

(Eingegangen 19. Oktober 1916)

**6. Verfahren zur Messung
der absoluten Potentialdifferenzen, welche beim
Kontakt beliebiger Leiter auftreten;
von Adolf Böhi.**

(Vorläufige Mitteilung.)

Seit Volta war die Frage, ob und in welchem Maße bei der Berührung heterogener Körper Potentialdifferenzen entstehen, Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, welche bisher zu keinem befriedigenden Abschluß geführt haben, und es ist heute noch unbekannt, aus welchen Einzelpotentialen sich die elektromotorische Kraft der galvanischen Elemente zusammensetzt.

Bei den verschiedenen Meßmethoden wurden teils unrichtige Voraussetzungen gemacht, teils wurden Fehlerquellen übersehen oder konnten nicht ausgemerzt werden, und so ist es begreiflich, daß die Resultate der verschiedenen Forscher weitgehend voneinander abweichen und oft nicht einmal dem Vorzeichen nach übereinstimmen.

Häufig waren die Meßmethoden nur relative, etwa bezogen auf den Potentialsprung $\text{Zn/Cu} = 100$. Allgemein als einwandfrei anerkannte Methoden zur Bestimmung absoluter Kontakt-Potentialdifferenzen existierten bis heute keine.

Nachfolgend ist ein empfindliches Kompensationsverfahren beschrieben, welches auf der Voraussetzung basiert, daß die Berührung sämtlicher heterogener Körper unter sich, seien diese gasförmig, flüssig oder fest, Leiter oder Nichtleiter, eine Elektrizitätsregung bewirken und zu Fehlerquellen Anlaß geben kann.

Erst relativ spät erkannte man den störenden Einfluß, welchen das auf der Oberfläche der untersuchten Metalle adhärierende Häutchen atmosphärischen Wassers auf die Messungen ausübte. Auch an Isolatoren konstatierte ich das Auftreten einer solchen Wasserschicht. Schon Bunsen

wies die große Hartnäckigkeit nach, mit welcher Glas eine Wasserschicht an der Oberfläche adsorbiert.¹⁾ Dieses Wasserschichten dürfte einerseits das Potential der Kondensatorplatten in den meisten Fällen verändern und kann auch, sofern die isolierende Schicht damit überzogen ist, zu Elektrizitätsverlusten beim Abheben der Kondensatorplatten Anlaß geben.

Neuere Untersuchungen²⁾ kamen zu dem Ergebnis, daß die bei Berührung von Metallen auftretenden kontaktelektromotorischen Kräfte fast völlig verschwinden, wenn die auf den Metallen adsorbierten Wasserschichten durch Erhitzen bei Gegenwart von Phosphorpentoxyd entfernt werden. Zu demselben Resultat kam Brown, welcher das auf den Metallplatten befindliche elektrolytische Häutchen durch Auskochen mit Öl bei 145° entfernte.³⁾

In dieser Beleuchtung erscheinen eine Reihe früherer Messungen wertlos.

Die in der Fig. 1 veranschaulichte Versuchsanordnung dient zunächst zur Bestimmung der Potentialdifferenz zwischen einem beliebigen Metall, z. B. Zink, und einer Flüssigkeit, z. B. verdünnter Schwefelsäure von einer bestimmten Konzentration.

Zur Messung der kontaktelektromotorischen Kraft $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$ deren Durchführung im folgenden gezeigt werden soll, dient ähnlich dem Vorgehen von Kohlrausch ein zerlegbarer Kondensator, welcher aus der Zinkplatte Z_1 und dem Flüssigkeitsbehälter F besteht. Letzterer ist oben durch eine straff angezogene Gummimembran oder ein aufgekittetes Glimmerplättchen abgeschlossen, welches letztere gleichzeitig als Isolationsschicht y des Kondensators dienen. Die Zn-Platte ist an einem Seidenfaden S und einer Rolle R aufgehängt; sie läßt sich von dem Fernrohr aus, das zur Beobachtung des Elektrometers Q benutzt wird, heben und senken.

Um die Zn-Platte vor dem Zutritt des atmosphärischen Wassers wie auch der Oxydation dauernd zu schützen, wird dieselbe in Isolierfirnis oder geeigneten Metallack, Kol-

1) R. Bunsen, Wied. Ann. 24. p. 327.

2) E. Warburg u. H. Greinacher, Drudes Ann. 16. p. 724. u. 17. p. 922. 1905.

3) J. Brown, Phil. Mag. (6) 5. p. 591. 1903.

Iodum usw. getaucht und in der Flüssigkeit, d. h. unter Luftabschluß, derart gründlich mechanisch gereinigt, bis die alte Metalloberfläche völlig entfernt und überall neues Metall bloßgelegt ist. Man überzieht mit frischem Firnis und läßt trocknen.

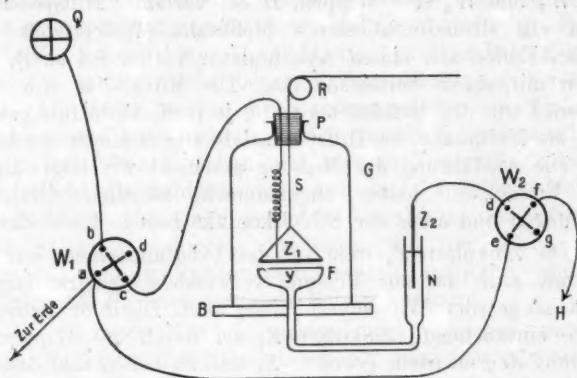


Fig. 1.

Auch längeres Erwärmen in Öl, z. B. Paraffinöl, führt, wie erwähnt, zur Entfernung der Wasserschicht. Um den nachherigen Luftzutritt zu vermeiden, überdeckt man die Metallplatte zwecks Fixierung einer dünnen Ölschicht mit einem Blatte des dünnsten ungeleimten Papiers (des unter dem Namen Japanseide bekannten Kopierpapiers), welches durch Eintauchen in heißes Öl ebenfalls vom Wasser befreit worden ist; bei Verwendung von geschmolzenem Paraffin anstatt Öl bildet das erkaltete feste Paraffinhäutchen den Schutz.

Der Kondensator befindet sich in einer Glasglocke *G*, welche auf einem Brett *B* ruht, inwendig behufs Vermeidung von elektrostatischen Störungen mit einer zur Erde abgeleiteten Stanniolschicht ausgekleidet und durch einen Paraffinpfpfen *P* abgeschlossen ist. In dem Stanniobelag bleibt oben ein kleines Beobachtungsfenster frei. Um Verluste der im Kondensator gebildeten Elektrizität infolge Leitung des Oberflächenwassers, besonders bei feuchtem Wetter, zu vermeiden,

wird das Innere der luftdicht abgeschlossenen Glasglocke durch ein Trockenmittel (Na) ausgetrocknet.

Der Kontakt zwischen der Flüssigkeit und dem Metall findet in einer Fortsetzung des Flüssigkeitsbehälters, der Niveauröhre N , statt; Z_2 sei die eintauchende Zinkplatte.

W_1 und W_2 sind Wippen, H ein variables Hilfspotential, etwa ein stromdurchflossener Meßdraht (Widerstandsdraht, dessen Enden mit einem Akkumulator verbunden sind), versehen mit einem Schleifkontakt. Die Mitte, das eine oder andere Ende des Meßdrahtes möge je nach Bedürfnis geerdet und als Nullpunkt des Hilfspotentials angenommen werden.

Die Ausführung der Messung geschieht wie folgt: Es sei der Einfachheit halber angenommen, sämtliche Drahtverbindungen und auch der Schleifkontakt bestehen aus Zink.

Die Zinkplatte Z_1 ruhe auf der Isolationsschicht auf und sei, wie auch das zur Messung verwendete Quadrantenpaar, zunächst geerdet (Wippenverbindung abc). Die in die Schwefelsäure eintauchende Zinkplatte Z_2 sei durch die Wippenverbindung deg ebenfalls geerdet. Z_1 und Z_2 haben also dasselbe Potential. Das Elektrometer befinde sich in der Nullage.

Beim Öffnen der Wippe W_1 (Verbindung bdc) soll kein Ausschlag entstehen.

Hebt man die Zinkplatte Z_1 mittels des Seidenfadens, so wird die infolge der Kondensatorwirkung gebundene Elektrizitätsmenge, herrührend von der Potentialdifferenz $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$, frei, und es entsteht im Elektrometer ein bestimmter Ausschlag α .

Nun wird die Meßoperation wiederholt mit der Abweichung, daß die Zinkplatte Z_2 nicht mit der Erde, sondern mit dem Hilfspotential H (Wippenstellung $d'fg$) verbunden wird.

Ergibt die Messung beim Hilfspotential P_1 den Ausschlag α und beim Hilfspotential P_0 keinen Ausschlag, was durch Einstellen des Schleifkontakts erreicht werden kann, so stellt $P_0 - P_1$ die gesuchte absolute Potentialdifferenz $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$ dar.

Bei den oben gemachten Annahmen muß $P_1 = 0$ werden.

Etwa auftretende elektrostatische Störungen, die sich jedoch bei richtigem Arbeiten leicht auf ein Minimum reduzieren lassen, werden kompensiert, sie sind übrigens der Bestimmung leicht zugänglich; deren Größe ergibt sich aus den Ausschlägen, welche beobachtet werden, nachdem das Flüssig-

keitsgefäß inwendig entsprechend der dem Innern der Glasglocke zugewandten Seite gut gereinigt und getrocknet ist.

In der Praxis gestaltet sich das Meßverfahren so, daß man den Zinkdraht durch Kupferdraht ersetzt. Es ist dies gestattet, wenn die Verbindungsstellen mit den Zinkplatten in eindeutig bestimmter Weise ausgeführt sind, so daß durch die gegebenenfalls neu hinzukommenden kontaktelektromotorischen Kräfte Zn/Cu das Potential von Z_1 und Z_2 um denselben Betrag gegenüber der vorhin beschriebenen Versuchsanordnung verändert wird. Am besten werden die Berührungsstellen von Zink und Kupfer unter Luftabschluß (in Öl) gründlich mechanisch gereinigt und hernach verhämmert oder auch sorgfältig verlötet.

Besteht der Schleifkontakt aus einem beliebigen Metalle, zweckmäßigerweise einem gegen die Einwirkung des Luftsauerstoffs widerstandsfähigen, so können, wie auch aus anderen Gründen, weitere Spannungsdifferenzen auftreten und bewirken, daß P_1 einen gewissen Betrag annimmt.

Die Methode läßt sich selbstredend variieren, etwa dadurch, daß man das Flüssigkeitsgefäß zum beweglichen Teil macht. Anstatt die Platte Z_1 zur Erzielung des Ausschlages zu heben, mag man sie auch senken. Statt der Glasglocke kann noch besser ein Metallgefäß mit einem Glasfenster zur Anwendung gelangen.

Die Bestimmung der Potentialdifferenzen zwischen zwei Metallen läßt sich im Prinzip entsprechend der vorhin beschriebenen Versuchsanordnung durchführen, indem der Flüssigkeitsbehälter durch eine Platte des gewünschten Metalls ersetzt wird.

Dieselben Werte müssen auf indirektem Wege erhalten werden. Ist nämlich die Potentialdifferenz zwischen zwei Metallen M_1 und M_2 gegenüber Quecksilber oder einer beliebigen Flüssigkeit R bekannt, so ergibt sich das Kontaktpotential zwischen den zwei Metallen durch Berechnung aus der galvanometrisch gemessenen Kette $M_1/R/M_2/M_1$.

Die Potentialdifferenzen zwischen zwei Flüssigkeiten lassen sich ebenfalls auf galvanometrischem Wege aus Ketten bestimmen, wenn die Einzelpotentiale der Flüssigkeiten gegenüber ein und demselben Metall gemessen sind. Oder aber noch besser geschieht die Messung elektrometrisch wie folgt: Will man etwa den Potentialsprung $H_2SO_4/NaCl$ messen, so bestimmt man

zunächst den entsprechenden Wert für $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$ in der oben beschriebenen Weise und erhalte den Wert m . Nun wird die H_2SO_4 -Lösung ersetzt durch die NaCl -Lösung, so daß Flüssigkeits- und Niveaugefäß damit gefüllt sind. Zn_2 wird in ein mit H_2SO_4 gefülltes Gefäß getaucht und die Verbindung der beiden Flüssigkeiten durch einen Glasheber hergestellt. Die Durchführung der Messung geschieht wie vorher und liefere den Wert n . Die Differenz $m - n$ ergibt das gesuchte Diffusionspotential $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{NaCl}$.

Eine vorläufige Messung ergab:

$\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$	$\xleftarrow{\hspace{1cm}}$	-0,6 Volt
$\text{H}_2\text{SO}_4/\text{NaCl}$	$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$	+0,2 „
NaCl/Zn	$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$	+0,5 „

Hieraus berechnet sich durch Addition für die

Kette $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4/\text{NaCl}/\text{Zn}$	$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$	+0,1 Volt
---	------------------------------	-----------

Die galvanometrische Messung der Kette ergab +0,15 Volt

In der Übereinstimmung des aus den gemessenen Einzelpotentialen durch Addition gefundenen Wertes für die Kette mit der durch die galvanometrische Bestimmung gefundenen E.M.K. besitzen wir eine Kontrolle für die Richtigkeit der Messungen.

Die Kapazitäten der verwendeten Kondensatoren können in weiten Grenzen gesteigert werden, und es dürfte sich ohne Schwierigkeit eine Genauigkeit auf Millivolt erzielen lassen, sofern die zu bestimmenden Potentialdifferenzen während der Messung genügend konstant bleiben.

Für obige Messungen wurde ein Kleinersches Quadrantelektrometer mit geringer Kapazität verwendet.

Zürich, im Juli 1916.

(Eingegangen 14. September 1916.)

**7. Über die Kreisgebiete
im elektromagnetischen Felde eines Hertzschen
und eines Abrahamschen Erregers;
von Paul Caspar.**

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

Hertz hat in seinen „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“¹⁾ eine ausführliche Beschreibung und graphische Darstellung der elektromagnetischen Kräfte in der Nähe eines geradlinigen elektrischen Erregers gegeben. Er benutzte zur experimentellen Untersuchung des Feldes einen Drahtkreis, der an einer Stelle durch eine Funkenstrecke unterbrochen war. War dieser Sekundärkreis auf den Oszillator abgestimmt, so zeigte das Auftreten von Funken im Sekundärkreis eine Erregung durch das Primärfeld an, und aus der Stellung des Sekundärkreises bei maximaler Funkenlänge konnte die Richtung der resultierenden Kraft festgestellt werden. An einigen Stellen des Feldes stellten sich nun Schwierigkeiten ein. Hertz schreibt darüber auf p. 98:

„Indem wir uns zunächst auf 1—1,5 m von der primären Schwingung entfernen, stoßen wir auf eine unerwartete Schwierigkeit. Die Maxima und Minima verlieren nämlich, abgesehen von bestimmten Lagen, an Deutlichkeit, so daß eine Einstellung auf dieselben schwer ist, ja in gewissen Punkten werden die Unterschiede der Funkenlänge während der Drehung des Kreises so klein, daß die Angabe einer bestimmten Richtung der Kraft unmöglich wird. Bemerkenswert ist nun, daß die Schwierigkeit wieder verschwindet, wenn wir eine Entfernung von etwa 2 m überschritten haben.“

Die beobachtete Erscheinung findet ihre Erklärung in der Vorstellung, daß die elektrische Kraft im Felde eines

1) H. Hertz, Gesammelte Werke 2. p. 87. u. 147.

Oszillators im allgemeinen überhaupt nicht eine feste Richtung und Größe in jedem Punkte des Feldes hat, sondern während einer Schwingung sich zeitlich nach Richtung und Größe verändert. Der Endpunkt des Vektors, der die elektrische Kraft in jedem Augenblick darstellt, wird im Laufe einer Schwingung ganz allgemein eine Ellipse durchlaufen. An den Stellen, in denen ein Überwiegen der Kraft in einer Richtung überhaupt nicht zu bemerken ist, würde diese Ellipse in einen Kreis übergehen. Man bezeichnet deshalb die oben beschriebenen Gebiete als die „Kreisgebiete“ im Felde des Erregers. Hertz hat ihr Bestehen in seinen bekannten Kraftlinienbildern plausibel zu machen gesucht.¹⁾ Bildet man aber die analytischen Bedingungen dafür, daß der Kraftvektor einen Kreis beschreibt, so findet man, daß diese Bedingungen in der Hertzschen Theorie des elektrischen Dipols nicht erfüllt sind.²⁾

Es entsteht nun die Frage, wieso Hertz gleichwohl solche Kreisgebiete beobachtet hat, ob die Bedingungen wenigstens angenähert soweit erfüllt sind, daß die betreffenden Stellen einer nicht sehr genauen Beobachtung als Kreisgebiete erscheinen konnten.

Zur Beurteilung dieser Frage habe ich nicht bloß die Existenzbedingungen der Kreisgebiete eingehend geprüft, sondern auch die ganze Verteilung der Amplituden und Phasen, die Lage und Form der Schwingungsellipsen im Felde des Erregers analytisch und graphisch dargestellt, und zwar nicht bloß für den Hertzschen Dipol, sondern auch für den Abrahamschen stabförmigen Erreger. Ich gebe im folgenden die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung wieder. Hinsichtlich der Einzelheiten muß auf die Dissertation verwiesen werden.

§ 1.

Ich knüpfe zunächst an diejenige Darstellung an, in der Hertz selbst die Erscheinung formuliert hat.

Die Verteilung der Kräfte um eine geradlinige Schwingung sei symmetrisch um die z -Achse, derart, daß dieselben

1) H. Hertz, Gesammelte Werke 2. p. 147.

2) W. König in Paul Drudes „Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage“. 2. Aufl. Stuttgart 1912.

für irgend einen Punkt nur abhängen von seiner z -Koordinate und seiner senkrechten Entfernung $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der z -Achse. Führen wir noch $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$ und den Winkel ϑ , den der Radiusvektor r mit der z -Achse bildet, ein, so wird nach der Maxwell'schen Theorie die Kräfteverteilung des Feldes durch folgende drei Größen angegeben¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\varrho = \frac{\varrho}{r^3} \left(-\frac{3f}{r^2} + \frac{3f'}{r} - f'' \right), \\ \mathfrak{E}_z = \frac{2}{r^3} \left(-\frac{f}{r} + f' \right) + \frac{\varrho^2}{r^3} \left(\frac{3f}{r^2} - \frac{3f'}{r} + f'' \right), \\ \mathfrak{H}_t = \frac{\varrho}{r^2} (f' - f''). \end{cases}$$

\mathfrak{E}_ϱ und \mathfrak{E}_z sind die Komponenten der elektrischen Kraft, \mathfrak{H}_t die Komponente der magnetischen Kraft, die senkrecht zu ϱ und z liegt, und zwar positiv gerechnet, wenn \mathfrak{H}_t durch eine negative Drehung um die z -Achse in die Richtung von \mathfrak{E}_ϱ übergeführt werden kann. f , f' , f'' sind die Abkürzungen für die Funktion $f(r - ct)$ und deren Abgeleitete. Führt man für f die periodische Funktion

$$e_0 \cdot l \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

ein, in der e_0 die maximale elektrische Ladung einer der Konduktoren und l die Länge des Erregers bedeutet, so lauten die Ausdrücke für \mathfrak{E}_ϱ , \mathfrak{E}_z und \mathfrak{H}_t :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\varrho = -\frac{e_0 l \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} [(3 - x^2) \sin \omega + 3x \cos \omega], \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{e_0 l}{r^3} [(2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta) \sin \omega + (2 - 3 \sin^2 \vartheta) x \cos \omega], \\ \mathfrak{H}_t = \frac{e_0 l \sin \vartheta}{r^3} x (x \sin \omega - \cos \omega), \end{cases}$$

wo

$$\omega = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \quad \text{und} \quad x = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (3)$$

ist. \mathfrak{E}_ϱ und \mathfrak{E}_z lassen sich in folgender Form schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\varrho = -B \cdot \sin(\omega + \beta), \\ \mathfrak{E}_z = -C \cdot \sin(\omega + \gamma). \end{cases}$$

1) Drude-König, Physik des Äthers. p. 540.

Hieraus geht hervor, daß im allgemeinen \mathfrak{E}_e und \mathfrak{E}_z sich als Komponenten einer elliptischen Schwingung darstellen lassen. Nur in dem besonderen Falle, in dem gleichzeitig B und C einander gleich sind und die Phasen die Differenz $\pi/2$ besitzen, haben wir eine Kreisschwingung vor uns.

$$(4) \quad \begin{cases} B = C, \\ \beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

liefern also die Bedingungen für die Hertz'schen Kreisgebiete. Es ist:

$$(5) \quad \begin{cases} B = \frac{e_0 l \sin \vartheta \cos \vartheta \sqrt{x^4 + 3x^2 + 9}}{r^3}, \\ C = \frac{e_0 l}{r^3} \sqrt{(2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta)^2 + (2 - 3 \sin^2 \vartheta)^2 x^2}, \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{3x}{3 - x^2}, \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{x(2 - 3 \sin^2 \vartheta)}{2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta}. \end{cases}$$

Die Größen x und ϑ , die die Kreisgebiete bestimmen, sind also aus folgenden beiden Gleichungen zu berechnen:

$$(6) \quad \begin{cases} \sin \vartheta \cos \vartheta \sqrt{x^4 + 3x^2 + 9} \\ \quad = \sqrt{(2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta)^2 + (2 - 3 \sin^2 \vartheta)^2 x^2}, \\ \frac{x(2 - 3 \sin^2 \vartheta)}{2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta} = -\frac{3 - x^2}{3x}. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{4x^2 + 6}{x^4 + 3x^2 + 9}.$$

Setzt man diesen Wert von $\sin^2 \vartheta$ in die passend umgeformte erste Gleichung unter (6) ein, so erhält man für x die Gleichung:

$$(7) \quad x^4 + 3x^2 + 9 = 0.$$

Diese Gleichung liefert aber zwei komplexe Werte für

$$x^2 = \frac{4\pi^2 f^2}{\lambda^2}.$$

Folglich kommt den Lösungen der Gleichung (7) keine geometrische und auch keine physikalische Bedeutung zu.

Wir stellen das Ergebnis noch in einer anderen Form dar, indem wir nachweisen, daß, wenn die eine Bedingung erfüllt ist, die andere nicht erfüllt ist. Wir setzen also

$$\beta - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

und geben hierfür die Größen B^2 und C^2 an. Die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}$$

ergibt:

$$\frac{(2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta)^2 + x^2 (2 - 3 \sin^2 \vartheta)^2}{x^2 (2 - 3 \sin^2 \vartheta)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 9}{(3 - x^2)^2}.$$

Diesen Wert führen wir in die 2. Gleichung von (5) ein und erhalten:

$$C = \frac{e_0 l}{r^3} \cdot \frac{x}{3 - x^2} \cdot (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \sqrt{x^4 + 3x^2 + 9}.$$

Setzen wir in den Ausdrücken von B^2 und C^2 wieder den aus der obigen Bedingung folgenden Wert von $\sin^2 \vartheta$ ein, so erhalten wir:

$$(8) \quad \begin{cases} B^2 = \frac{e_0^2 l^2}{r^6} \left(\frac{4x^6}{x^4 + 3x^2 + 9} + 2 \right), \\ C^2 = \frac{e_0^2 l^2}{r^6} \cdot \frac{4x^6}{x^4 + 3x^2 + 9}. \end{cases}$$

Aus dieser Form von B^2 und C^2 ist deutlich zu ersehen, daß in den Gebieten, in denen

$$\beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

ist, an keiner Stelle B^2 genau gleich C^2 ist, sondern daß beide Amplitudenquadrate sich um den Summanden

$$\frac{e_0^2 l^2}{r^6} \cdot 2$$

unterscheiden. Dieser Summand wird niemals gleich Null, sondern kann höchstens für großes r , d. h. in großer Entfernung vom Erreger gegenüber den anderen Größen in B^2 vernachlässigt werden.

§ 2.

Man kann gegen die obige Darlegung den Einwand erheben, daß Hertz die Existenz der Kreisgebiete auf ganz anderem Wege, nämlich graphisch an seinen Kraftlinienbildern, nachgewiesen hat. Er bezeichnet als Kreisgebiet diejenigen Punkte, in denen bei der Übereinanderlagerung zweier Kraftlinienzeichnungen, welche Zeiten entsprechen, die um eine viertel Schwingungsdauer voneinander entfernt sind, das Liniensystem der einen Figur senkrecht dasjenige der anderen schneidet und die Abstände der Linien der einen Zeichnung denen der anderen gleich werden. Offenbar sind die Hertz'schen Zeichnungen nicht so absolut genau, daß man bei ihrer Übereinanderlegung mit Sicherheit entscheiden könnte, ob die durch den Schnitt der beiden Liniensysteme entstehenden Vierecke wirklich in aller Strenge Quadrate sind. Daß sie es nicht sein können, läßt sich zeigen, wenn man unter Benutzung der Gleichung für die elektrischen Kraftlinien des Hertz'schen Dipols die von Hertz aufgestellte Bedingung analytisch formuliert. Dieser Beweisgang führt selbstverständlich zu demselben Ergebnis wie die obigen Betrachtungen; denn die umständlichen Rechnungen, die ich hier übergehe, laufen auf folgende Bedingungsgleichung für die Kreisgebiete hinaus:

$$(9) \quad (B^2 - C^2)^2 + 4B^2 C^2 \cos^2 (\gamma - \beta) = 0.$$

Diese aber zerfällt in die beiden Gleichungen unter (4).

Eine dritte Art der Darstellung gewinnen wir, wenn wir die durch (3) dargestellten Schwingungsellipsen auf ihre Hauptachsen transformieren. Dazu muß eine Drehung um den Winkel α vorgenommen werden. 2α ist durch die Gleichung

$$(10) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2BC \cos(\gamma - \beta)}{B^2 - C^2}$$

bestimmt.

Dann lautet die Gleichung der Schwingungsellipse:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \\ a^2 = \frac{2B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}{C^2 + B^2 - \sqrt{(B^2 - C^2)^2 + 4B^2 C^2 \cos^2(\gamma - \beta)}}, \\ b^2 = \frac{2B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}{C^2 + B^2 + \sqrt{(B^2 - C^2)^2 + 4B^2 C^2 \cos^2(\gamma - \beta)}}. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung (9) für Kreisgebiete ist also dieselbe Gleichung, die $a = b$ machen würde.

a und b sind in Fig. 1 graphisch dargestellt für die verschiedenen Werte $\vartheta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$. Es ist $\epsilon_0 = 1000$ elektrostatischen Einheiten und $l = 1,4$ m

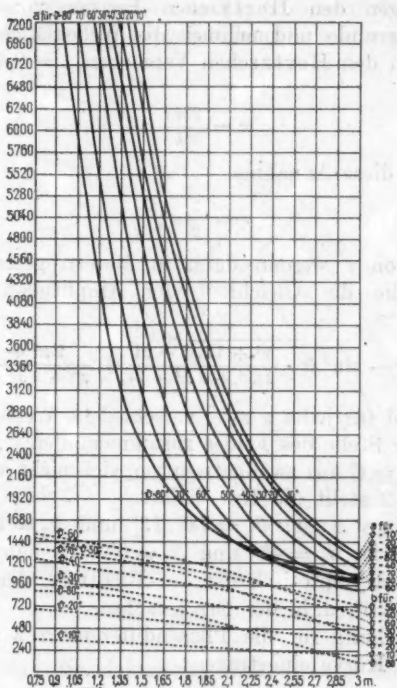


Fig. 1.

angenommen. Aus der Figur ersieht man, daß für denselben Wert ϑ a und b keinen Schnittpunkt besitzen, daß also Kreisgebiete innerhalb eines Umkreises von 3 m nicht vorkommen.

§ 3.

Nachdem in § 1 und § 2 einwandfrei nachgewiesen worden ist, daß Kreisgebiete im elektrischen Felde des Hertz'schen Erregers nicht existieren, bleibt zur Erklärung der Un-

bestimmtheit der elektrischen Kraftrichtungen an gewissen Stellen des Feldes nur die Möglichkeit übrig, daß an diesen Stellen zwar keine wirklichen Kreisschwingungen, aber angenäherte vorkommen. Zur Auffindung dieser Stellen wollen wir die Gleichungen (6) graphisch darstellen.

Wir legen den Hertzschen Erreger von der Länge $l = 1,4 \text{ m}$ zugrunde und nehmen die Wellenlänge angenähert gleich der bei den Hertzschen Versuchen $\lambda = 9,4247 \text{ m}$. Da allgemein

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

ist, wird für diese Annahme

$$r = \frac{3}{2} x;$$

die Werte von r werden dann in Metern gerechnet. Die Gleichung, die die Gleichheit der Amplituden ausdrückt, lautet:

$$(6a) \quad \sin^4 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cdot \frac{x^4 + 11x^2 + 21}{2(x^4 + 3x^2 + 9)} + \frac{2x^2 + 2}{x^4 + 3x^2 + 9} = 0.$$

Sie ergibt für jedes x zwei verschiedene Werte von $\sin^2 \vartheta$, die an keiner Stelle des Feldes zusammenfallen. Also besteht die Kurve $B = C$ aus zwei getrennten, sich nicht schneidenden Ästen. Fig. 2 stellt die Kurve dar.

Für kleines x ist: $\vartheta_1 = 74^\circ 15'$ und $\vartheta_2 = 29^\circ 28'$; für sehr großes x ist $\vartheta_1 = 45^\circ$ und $\vartheta_2 = 0^\circ$. Es nähert sich also der eine Ast asymptotisch der 45° -Richtung, der andere der Richtung $\vartheta = 0^\circ$, d. h. der Erregerachse.

Die Gleichung für die Phasendifferenz $\pi/2$ ist ebenfalls in Fig. 2 als Kurve eingetragen:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{4x^2 + 6}{x^4 + 3x^2 + 9}.$$

Hier ist $\vartheta = 54^\circ 44'$ für sehr kleines x und $\vartheta = 0^\circ$ für großes x . Diese Kurve nähert sich also auch wie der eine Ast der obigen Kurve der Erregerachse, und zwar lehrt die Darstellung, daß diese beiden Kurven ungefähr vom Werte $r = 6 \text{ m}$ ab sich einander asymptotisch nähern. Diese asymptotische Annäherung ist die Bestätigung der aus Gleichung (8) gezogenen Schlußfolgerung, daß nämlich in großen Entfernungen vom Erreger angenäherte Kreisgebiete existieren, und daß diese

Kreisgebiete um so vollkommener ausgeprägt sind, je größer r ist. Aber diese angenäherten Kreisgebiete sind nicht als die von Hertz gefundenen Stellen der Unbestimmtheit der elektrischen Kraftrichtung anzusehen, da erstens diese Stellen von Hertz nur bis auf eine Entfernung 2 m vom Erreger gefunden wurden, und zweitens die aus Fig. 2 ersichtlichen Stellen angenäherter Kreisschwingungen sich mehr und mehr der z -Achse

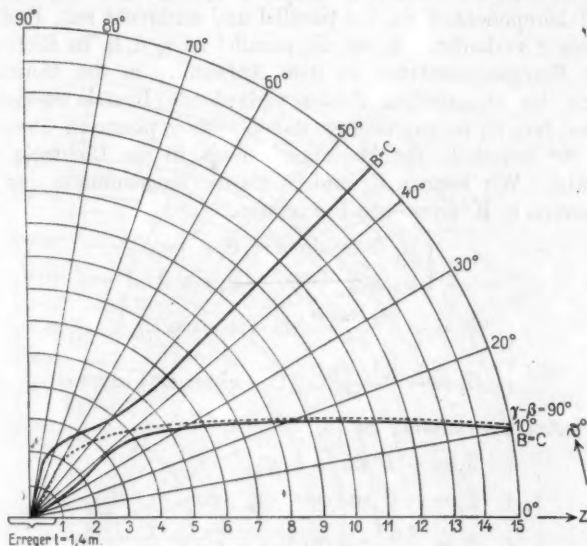


Fig. 2.

nähern, so daß die elektrische Kraftwirkung hier äußerst gering und kaum noch wahrnehmbar ist.

Um ein Urteil darüber zu gewinnen, wie es möglich ist, daß Hertz in ungefähr 2 m Entfernung vom Erreger Stellen angenäherter Kreisgebiete finden konnte, muß man offenbar die gesamte Verteilung der Amplituden- und Phasenverhältnisse im Kraftfeld eines Oszillators ins Auge fassen. Ich habe zu diesem Zweck in meiner Dissertation graphische Darstellungen des Verlaufes der Größen B und C und der Verhältnisse B/C , ebenso der Phasen β , γ und der Differenz $\beta-\gamma$ gegeben. Aber ich verweise hinsichtlich dieser ziemlich ver-

wickelten Darstellung auf das Original und beschränke mich hier auf die Wiedergabe einer anderen Darstellungsart, die ein wesentlich einfacheres Bild des Verlaufes der in Betracht kommenden Größen gibt.

§ 4.

Wir führen an Stelle von \mathcal{E}_ρ und \mathcal{E}_z diejenigen elektrischen Kraftkomponenten ein, die parallel und senkrecht zum Radiusvektor r verlaufen. \mathcal{E}_l sei die parallel zu r , d. h. in Richtung vom Erregungszentrum zu dem Aufpunkte in der Meridianebene des elektrischen Feldes verlaufende Kraftkomponente, \mathcal{E}_t sei dem \mathcal{E}_l so zugeordnet, daß bei einer positiven Drehung um 90° innerhalb der Meridianebene \mathcal{E}_t in die Richtung von \mathcal{E}_l fällt. Wir können \mathcal{E}_l und \mathcal{E}_t als die longitudinale und die transversale Komponente bezeichnen.

$$(12) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_l = \mathcal{E}_\rho \sin \vartheta + \mathcal{E}_z \cos \vartheta, \\ \mathcal{E}_t = \mathcal{E}_\rho \cos \vartheta - \mathcal{E}_z \sin \vartheta. \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_l = -\frac{2e_0 l \cos \vartheta}{r^3} (\sin \omega + x \cos \omega), \\ \mathcal{E}_t = -\frac{e_0 l \cdot \sin \vartheta}{r^3} [(1 - x^2) \sin \omega + x \cos \omega]. \end{cases}$$

Setzt man analog zu (8):

$$(14) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_l = -B' \sin(\omega + \beta'), \\ \mathcal{E}_t = -C' \sin(\omega + \gamma'), \end{cases} \quad \text{wo}$$

$$(15) \quad \begin{cases} B' = \frac{2e_0 l}{r^3} \cos \vartheta \cdot \sqrt{1 + x^2}, \\ C' = \frac{e_0 l}{r^3} \sin \vartheta \sqrt{1 - x^2 + x^4}, \\ \operatorname{tg} \beta' = x, \\ \operatorname{tg} \gamma' = \frac{x}{1 - x^2}, \end{cases}$$

so ergeben die zu (4) analogen Bedingungen für die Kreisgebiete $B' = C'$ und

$$\gamma' - \beta' = \frac{\pi}{2}$$

selbstverständlich auch für diese Kraftkomponenten \mathcal{E}_l und \mathcal{E}_t keine wirklichen Kreisgebiete, denn schon die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\gamma' - \beta') = x^3$$

zeigt, daß eine Phasendifferenz $\pi/2$ nur im Unendlichen möglich ist. Die Figg. 3 und 4 zeigen eine Übersicht über die Kurven der Werte:

$$B/C' = 2 \cotg \vartheta \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}}$$

und

$$\operatorname{tg}(\gamma' - \beta') = x^3.$$

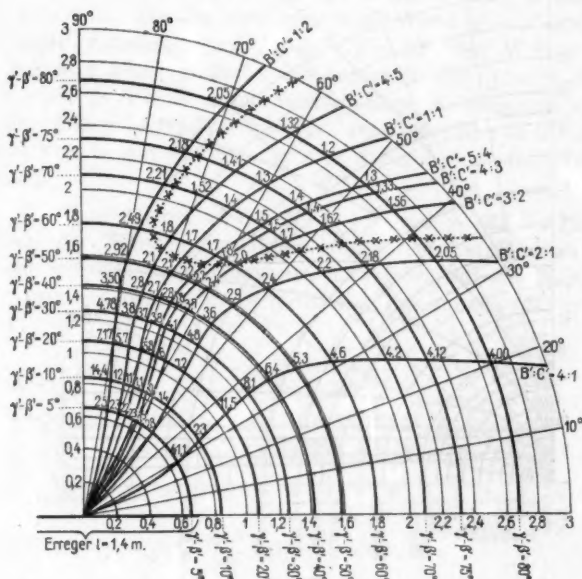


Fig. 3.

Die Zahlen an den Schnittpunkten der beiden Kurvenscharen bedeuten das Verhältnis der beiden Hauptachsen a/b der Schwingungsellipsen.

Die B'/C' -Kurven haben ein viel einfacheres Aussehen als die B/C -Kurven. Die B'/C' -Kurven bestehen aus nur einem Ast, der den größten Wert ϑ für $x^2 = \sqrt{3} - 1$, d. h. für $r = 1,28$ m erreicht und für $x = \sqrt{2}$, d. h. $r = 2,1$ m wieder denselben Winkel ϑ besitzt wie für $x = 0$. Von dieser Entfernung $r = 2,1$ m ab nimmt der Winkel ϑ für jede B'/C' -Kurve beständig ab; die Kurven nähern sich also der

Erregerachse. Die Kurven, für die B'/C' beträchtlich < 1 ist, bleiben für kleines x in der Nähe der Richtung $\vartheta = 90^\circ$. Für $\vartheta = 0$ ist $\mathcal{E}_t = 0$, während für $\vartheta = 90^\circ$ die longitudinale Komponente \mathcal{E}_t verschwindet und die transversale Komponente \mathcal{E}_s allein übrig bleibt. In großen Entfernungen vom Erreger überwiegt die transversale Komponente ganz beträcht-

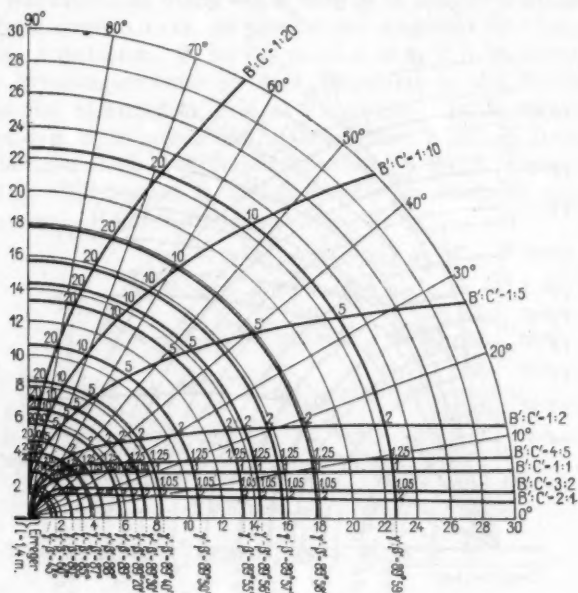


Fig. 4.

Die Zahlen an den Schnittpunkten der beiden Kurvenscharen bedeuten das Verhältnis der beiden Hauptachsen a/b der Schwingungsellipsen.

lich die longitudinale Komponente, so daß dort die longitudinale Komponente ganz vernachlässigt werden kann. Das Verhalten der Amplituden stellt die Fig. 5 noch übersichtlicher dar. Hier ist eine rechtwinklige Koordinatendarstellung für die Koordinaten C'/B' und r gewählt. Die C'/B' -Werte haben entsprechend den Maxima der B'/C' -Werte Minima in der Entfernung $r = 1,28$ m für jeden Winkel ϑ und erreichen in der Entfernung $r = 2,1$ m wieder denselben Wert wie für

$r = 0$. Von der Entfernung $r = 2,1$ m ab steigen die C'/B' -Werte für jeden Winkel ϑ beständig; der Anstieg wird um so steiler, je größer der Winkel ϑ ist, d. h. die Amplitude C' der transversalen Kraftkomponente herrscht in einem Punkte des Feldes um so mehr vor, je näher der Punkt an der Richtung $\vartheta = 90^\circ$ liegt, und bei gleichem ϑ , je größer r ist.

Die $(\gamma' - \beta')$ -Kurven sind in Figg. 3 und 4 einfache Kreise, deren Radien erst von dem Werte $\gamma' - \beta' = 89^\circ 59'$ ab rapid zunehmen und für $\gamma' - \beta' = 90^\circ$ den Wert $r = \infty$ erreichen. Diese einfache Abhängigkeit der $(\gamma' - \beta')$ -Werte von r ist in Fig. 6 durch rechtwinklige Koordinaten dargestellt. Die $(\gamma' - \beta')$ -Werte steigen im Intervall $r = 0$ bis 6 m rapid von 0° auf 89° an, um sich dann asymptotisch 90° zu nähern.

Die Transformation der B' , C' , β' und γ' auf die Hauptachsen der Schwingungsellipse ergibt selbstverständlich dieselben Werte der Hauptachsen a und b wie für die Werte B , C , β und γ , denn schreiben wir die Gleichungen (11) in der Form:

$$(11a) \quad \begin{cases} a^2 = \frac{2 B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}{B^2 + C^2 - \sqrt{(B^2 + C^2)^2 - 4 B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}}, \\ b^2 = \frac{2 B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}{B^2 + C^2 + \sqrt{(B^2 + C^2)^2 - 4 B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta)}}, \end{cases}$$

so ist nach (5):

$$B^2 C^2 \sin^2(\gamma - \beta) = \frac{e_0^4 I^4}{r^{12}} \cdot \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot 4 x^6$$

$$B^2 + C^2 = \frac{e_0^2 I^2}{r^6} [\sin^2 \vartheta (x^4 - 5 x^2 - 3) + 4(1 + x^2)]$$

und nach (15):

$$B'^2 \cdot C'^2 \cdot \sin^2(\gamma' - \beta') = \frac{e_0^4 I^4}{r^{12}} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot 4 x^6$$

$$B'^2 + C'^2 = \frac{e_0^2 I^2}{r^6} [\sin^2 \vartheta (x^4 - 5 x^2 - 3) + 4(1 + x^2)].$$

Die Werte für den Winkel α der Gleichung (10) sind für B' , C' , β' und γ' andere als für B , C , β und γ , denn der durch diese Gleichung bestimmte Winkel — er soll jetzt mit φ bezeichnet werden — bedeutet jetzt den Winkel zwischen großer

Hauptachse der Ellipse und dem Radiusvektor r . Die folgende Tabelle der Werte a/b und des Winkels φ ist für die Verhältnisse B'/C' und die Winkel $(\gamma' - \beta')$ aufgestellt.

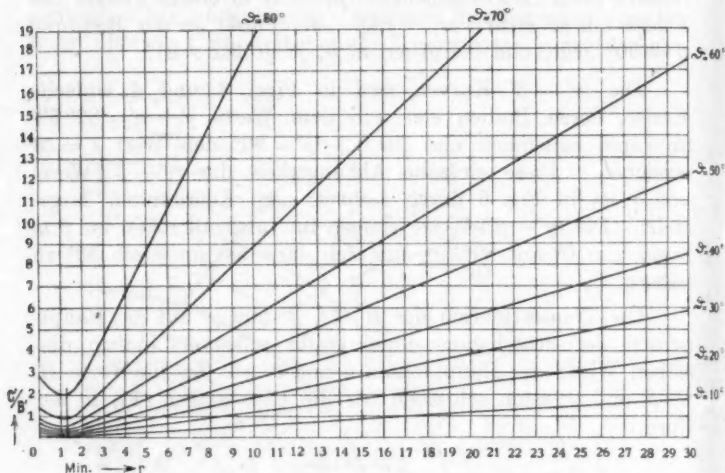


Fig. 5.

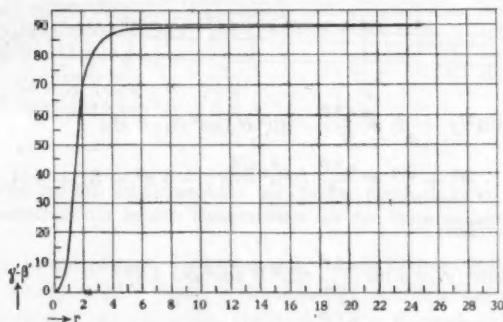


Fig. 6.

Ungefähr vom Werte $\gamma' - \beta' = 85^\circ$, d. h. $r > 8$ m ab ist für die Werte $B'/C' < 1$ φ angenähert gleich 90° , d. h. die große Hauptachse der elliptischen Schwingung steht auf dem Radiusvektor senkrecht. Da sich aber die Kurven $B'/C' \geq 1$

B/C'	$\gamma' - \beta' = 70^\circ$	$\gamma' - \beta' = 75^\circ$	$\gamma' - \beta' = 80^\circ$	$\gamma' - \beta' = 85^\circ$	$\gamma' - \beta' = 86^\circ$	$\gamma' - \beta' = 87^\circ$	$\gamma' - \beta' = 88^\circ$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ 10'$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ 20'$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ 30'$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ 40'$	$\gamma' - \beta' = 89^\circ 50'$	a/b q
4:1	4.25 5° 10'	4.12 3° 50'	4.06 2° 38'	4.02 1° 20'	4.01 0° 54'	4.00 0° 37'	4.00 0° 28'	4.00 0° 19'	4.00 0° 12'	4.00 0° 10'	4.00 0° 8'	4.00 0° 5'	4.00 0° 2'	a/b q
2:1	2.20 12° 15'	2.18 9° 33'	2.05 6° 32'	2.01 3° 19'	2.00 2° 40'	2.00 2°	2.00 1° 19'	2.00 0° 39'	2.00 0° 33'	2.00 0° 28'	2.00 0° 19'	2.00 0° 14'	2.00 0° 8'	a/b q
3:2	1.72 19° 41'	1.62 15° 56'	1.56 11° 20'	1.52 5° 55'	1.51 4° 45'	1.50 3° 35'	1.50 2° 24'	1.50 1° 11'	1.50 0° 59'	1.50 0° 46'	1.50 0° 36'	1.50 0° 24'	1.50 0° 12'	a/b q
4:3	1.58 24° 54'	1.48 20° 55'	1.40 15° 31'	1.35 8° 25'	1.345 6° 46'	1.34 5° 6'	1.33 3° 25'	1.33 1° 43'	1.33 1° 26'	1.33 1° 12'	1.33 0° 51'	1.33 0° 32'	1.33 0° 19'	a/b q
5:4	1.52 28° 20'	1.45 24° 32'	1.33 18° 52'	1.27 10° 36'	1.26 8° 36'	1.26 6° 35'	1.25 4° 25'	1.25 2° 13'	1.25 1° 51'	1.25 1° 32'	1.25 1° 6'	1.25 0° 44'	1.25 0° 22'	a/b q
1:1	1.43 45°	1.30 45°	1.19 45°	1.09 45°	1.056 45°	1.054 45°	1.035 45°	1.017 45°	1.014 45°	1.01 45°	1.009 45°	1.00 45°	1.00 45°	a/b q
4:5	1.52 61° 40'	1.41 65° 28'	1.32 71° 8'	1.27 79° 24'	1.26 81° 24'	1.26 83° 25'	1.25 85° 35'	1.25 87° 47'	1.25 88° 9'	1.25 88° 32'	1.25 88° 54'	1.25 89° 16'	1.25 89° 38'	a/b q
1:2	2.20 77° 45'	2.18 80° 27'	2.05 83° 28'	2.014 86° 41'	2.01 87° 20'	2.00 88°	2.00 88° 41'	2.00 89° 21'	2.00 89° 28'	2.00 89° 34'	2.00 89° 40'	2.00 89° 46'	2.00 89° 52'	a/b q
1:5	5.39 85° 57'	5.18 86° 56'	5.09 87° 56'	5.01 88° 57'	5.00 89° 10'	5.00 89° 24'	5.00 89° 36'	5.00 89° 46'	5.00 89° 49'	5.00 89° 51'	5.00 89° 53'	5.00 89° 56'	5.00 89° 58'	a/b q
1:10	10.50 88° 1'	10.25 88° 31'	10.15 88° 59'	10.01 89° 30'	10.00 89° 36'	10.00 89° 42'	10.00 89° 47'	10.00 89° 53'	10.00 89° 55'	10.00 89° 57'	10.00 89° 58'	10.00 89° 58'	10.00 89° 59'	a/b q
1:20	21.32 88° 44'	20.62 89° 10'	20.40 89° 30'	20.02 89° 45'	20.01 89° 51'	20.00 89° 55'	20.00 89° 58'	20.00 89° 58'	20.00 89° 58'	20.00 89° 59'	20.00 89° 59'	20.00 89° 59'	20.00 89° 59'	a/b q

von $r = 3$ m ab der Erregerachse asymptotisch nähern, so ist mit Ausnahme der Punkte in unmittelbarer Nähe der Achse der Winkel φ für alle Punkte des Feldes von dieser Entfernung $r = 3$ m ab angenähert 90° . Aus der Tabelle sind für die Schnittpunkte der B'/C' -Kurven mit dem $(\gamma' - \beta')$ -Kurven in den Figg. 3 und 4 die zugehörigen Werte von a/b entnommen und in die Figuren eingetragen worden. Der in der Fig. 3 gekreuzt umgrenzte Bezirk bezeichnet das Gebiet angenäherter Kreispunkte.

Die Zeichnung lehrt, daß Schwingungsellipsen mit angenäherter Kreisform, für die also das Verhältnis der Hauptachsen zwischen den Werten 1 und 2 liegt, von der Entfernung $r = 1,7$ m ab auftreten, und daß ein streifenförmiges Gebiet ungefähr von dem Punkte $r = 1,7$ m, $\vartheta = 75^\circ$ ausgehend sich parallel der z -Achse entlang zieht, in dem diese angenäherten Kreispunkte existieren. Dieses Gebiet ist in Fig. 3 durch eine gekreuzte Linie umgrenzt. Ebenso läßt die Fig. 1 die angenäherten Kreisgebiete erkennen: für die Winkelwerte $\vartheta = 50-70^\circ$ kommen sich die a - und b -Kurven näher als für alle anderen Winkel ϑ , so daß für diese Werte von ϑ ungefähr von der Entfernung $r = 1,7$ m ab das Verhältnis a/b zwischen 1 und 2 liegt. Wir können wohl die Vermutung aussprechen, daß wir hier die von Hertz gefundenen Stellen der undeutlichen Krafrichtung vor uns haben. Übereinstimmung mit den Hertzschen Versuchen besteht hinsichtlich des Auftretens dieser Erscheinung bei einer bestimmten Entfernung vom Erreger. Das aus der Zeichnung ersichtliche Ergebnis, daß in einer Entfernung von ungefähr 2,2 m von der Erregerachse die Erscheinung am ausgeprägtesten ist, schließt sich nicht genau den Versuchsergebnissen an, denn der Versuch ergab eine Entfernung von etwa 1,5–2 m. Doch stimmen hierin nicht alle Angaben, die Hertz selbst an verschiedenen Stellen seiner Schriften gemacht hat, überein. Eine genaue Übereinstimmung mit dem Versuch ist auch nicht zu erwarten, denn die Rechnung von Hertz setzt einen elektrischen Dipol von Dimensionen voraus, die unendlich klein gegen die Wellenlänge sind. Der wirkliche Hertzsche Erreger war etwa ein Mittelding zwischen einem elektrischen Dipol und einem stabförmigen Erreger. Für den letzteren ist die genauere Theorie von Abraham entwickelt worden. Es ist daher von

Interesse, die ganze Betrachtung auf einen stabförmigen Erreger auszudehnen. Es ist außerdem sehr wohl möglich, daß die räumliche Ausdehnung des Resonators, den Hertz bei seinen Versuchen verwendete, und der nur den Mittelwert der Kraft für eine größere Strecke angibt, dazu beigetragen hat, die Unvollkommenheit der Kreisgebiete, die Hertz beobachtete, zu verdecken.

Da

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

ist, so gelten die Resultate für einen Resonator, der auf die Wellenlänge $\lambda = 9,4247$ m abgestimmt ist. Je kleiner λ ist, um so näher liegen die Kreisgebiete an dem Erreger.

§ 5.

Ich gehe nun dazu über, dasselbe Problem für den Abrahamschen stabförmigen Erreger¹⁾ zu behandeln. Ich will mich dabei jenes Hertzschen Beweisganges bedienen, den ich oben in § 2 für den Hertzschen Dipol nur angedeutet habe.

Die Gleichungen der Kraftlinien hat Hack²⁾ für seine graphischen Darstellungen nach der Abhandlung von Abraham für den Fall eines stabförmigen Erregers von der Länge gleich 2 aufgestellt. Sie lauten für die ungeradzahligen Schwingungen:

$$(16) \quad \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_n} \right) \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} = \text{Const.}$$

n bedeutet eine ganze ungerade Zahl und gibt die Ordnung der Oberschwingungen an; λ_n ist die zugehörige Wellenlänge, x und y sind elliptische Koordinaten; ihre Längen sind gleich denen der großen Halbachsen der konfokalen Ellipsen bzw. Hyperbeln. Die Brennpunkte liegen in den Enden des Stabes, so daß die halbe Brennpunktsentfernung gleich 1 ist. Die Gleichungen der konfokalen Ellipsen bzw. Hyperbeln lauten:

$$\frac{\xi^2}{x^2} + \frac{\eta^2}{x^2 - 1} = 1,$$

$$\frac{\xi^2}{y^2} - \frac{\eta^2}{1 - y^2} = 1.$$

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 66. p. 435. 1898.

2) F. Hack, Wied. Ann. 14. p. 539. 1904.

Es besteht also die Gleichung:

$$(17) \quad ds^2 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 1} dx^2 + \frac{x^2 - y^2}{1 - y^2} dy^2.$$

Wir stellen die Gleichung (16) für 2 Schwingungszustände auf, die um $T/4$ voneinander entfernt sind, und führen die Kraftliniensysteme dieser beiden Fälle als neue krummlinige Koordinaten u, v in die Rechnung ein:

$$(18) \quad \begin{cases} \cos \omega \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} = u, \\ \sin \omega \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} = v, \end{cases}$$

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_n} \right)$$

ist dabei gleich ω gesetzt. Wir transformieren die Gleichung (17) auf die neuen Koordinaten.

Die Determinante der Transformation ist:

$$\frac{1}{\Delta} = -\frac{\pi^2 n}{2 \lambda_n} \cdot \sin \pi n y.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\Delta \frac{\pi n}{2} \cdot \sin \omega \sin \frac{\pi n y}{2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \Delta \frac{\pi n}{2} \cdot \cos \omega \sin \frac{\pi n y}{2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \Delta \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot \cos \omega \cos \frac{\pi n y}{2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \Delta \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot \sin \omega \cos \frac{\pi n y}{2}.$$

Daraus folgt:

$$ds^2 = \Delta^2 (x^2 - y^2) \pi^2 \left[\frac{\frac{n^2}{4} \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{x^2 - 1} (-\sin \omega du + \cos \omega dv)^2 \right. \\ \left. + \frac{4 \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 \cdot (1 - y^2)} (\cos \omega du + \sin \omega dv)^2 \right],$$

oder:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = \Delta^2 \cdot (x^2 - y^2) \pi^2 & \left\{ du^2 \left[\frac{\sin^2 \omega \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 + \frac{4 \cos^2 \omega \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \right] \right. \\
 & + 2 du dv \left[- \frac{\sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 + \frac{4 \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \right] \sin \omega \cos \omega \\
 & \left. + dv^2 \left[\frac{\cos^2 \omega \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 + \frac{4 \sin^2 \omega \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$(19) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

so sind E, F, G die bekannten Gauss'schen Funktionen aus der Flächentheorie. $F=0$ ist die Bedingung für das Senkrechtstehen der Kraftlinien aufeinander:

$$(20) \quad \frac{\sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 = \frac{4 \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)}.$$

Zufolge dieser Gleichung ist die 2. Bedingung, daß nämlich die Koordinatenlinien kleine Quadrate bilden, d. h. $E=G$ ist, im Gegensatz zum Hertz'schen Erreger hier identisch erfüllt. Zur Bestimmung der Kreisgebiete steht uns hier also nur die Gleichung (20) zur Verfügung. Wir geben (20) die Gestalt:

$$(20a) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi n y}{2} = \pm \frac{4}{n \cdot \lambda_n} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}},$$

oder da nach Abraham für einen stabförmigen Erreger, bei dem das Verhältnis der Dicke zur Länge hinreichend klein ist, $\lambda_n = 4/n$ ist:

$$(20b) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi n y}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}}.$$

Diese Kurven sind in Fig. 7 in elliptischen Koordinaten x, y für die Werte $n=1$ und $n=3$ dargestellt.

Die Kurve für die Grundschwingung $n=1$ beginnt im Nullpunkt des ξ, η -Koordinatensystems der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln, d. h. im Erregerzentrum, steigt bis auf eine Entfernung 1,1 m gegenüber den Endpunkten des Erregers an und verläuft von nun an asymptotisch zur Richtung der

Erregerachse. Diese Kurve wirklicher Kreispunkte entspricht also genau dem Streifen angenäherter Kreisgebiete beim Hertzschen Erreger, der sich dort auch im bestimmten Abstand parallel zur Erregerachse ins Unendliche hinzieht. Der Hertzsche und der Abrahamsche Erreger weisen also in großer Entfernung vollkommene Übereinstimmung in bezug auf die Kreisgebiete auf.

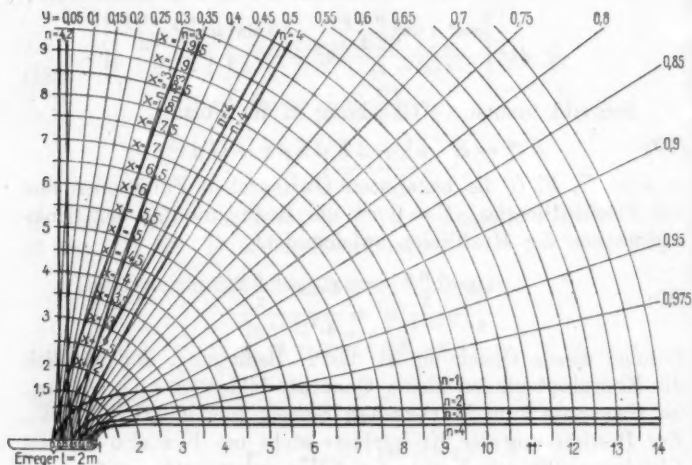


Fig. 7.

Die Kurve für die 2. Oberschwingung $n = 3$ besteht aus 3 Ästen. Die Äste sitzen mit Spitzen in den Punkten

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,66 \end{pmatrix}$$

auf dem Erreger auf. Ein Ast verläuft vom Punkte

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,66 \end{pmatrix}$$

aus angenähert parallel zur Kurve der Grundschwingung, aber in größerer Nähe der Erregerachse entsprechend dem oben erwähnten Umstande, daß für die kleinere Wellenlänge der Oberschwingung die Kreisgebiete näher der Erregerachse ver-

laufen. Die beiden anderen Äste der 2. Oberschwingung beginnen bei

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,66 \end{pmatrix}$$

auf der Erregerachse und laufen beide asymptotisch auf die Richtung $y = 0,33$ zu. Diese Hyperbel $y = 0,33$ ist aber die Knotenlinie der 2. Oberschwingung, die in den Hackschen Zeichnungen als Schnitt der Meridianebene mit dem zweischaligen Umdrehungshyperboloid dargestellt ist und die drei Schwingungsräume der 2. Oberschwingung voneinander trennt. Die Ausgangspunkte

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,66 \end{pmatrix}$$

der Kreispunktskurven befinden sich in entgegengesetzten Schwingungsphasen, da die Wellenlänge $\lambda_3 = 4/3$ beträgt und an diesen Stellen die Schwingungsbäuche der 2. Oberschwingung liegen. Das Hineinlaufen dieser beiden entgegengesetzten Kreisschwingungen in die Knotenlinie $y = 0,33$ ist genau entsprechend der asymptotischen Annäherung der Grundschnittpunktskurve an die Achse. Das ist in allen diesen Fällen ein Zeichen dafür, daß die longitudinale Welle mit wachsender Entfernung schneller an Intensität abnimmt als die transversale, und daß daher Kreisgebiete nur noch dort möglich sind, wo die transversale Welle sehr schwach ist, d. h. in der Nähe der Knotenlinien.

Für irgendeine ungeradzahlige Oberschwingung n bilden sich n Äste der Kreispunktskurve aus, die mit Spitzen in den Schwingungsbäuchen auf der Erregerachse an den Stellen

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = \frac{\nu - 1}{n} \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, 3, 5 \dots n)$$

aufsitzen. Der eine der beiden von dem Punkte

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = \frac{n - 1}{n} \end{pmatrix}$$

ausgehenden Äste verläuft parallel zur Erregerachse ins Unendliche. Alle übrigen Äste gehen immer paarweise von

Punkten entgegengesetzter Schwingungsphase aus und nähern sich immer paarweise asymptotisch den Knotenlinien

$$y = \frac{v}{n} \quad (v = 1, 3, 5 \dots n = 2).$$

Die Gleichungen der Kreisgebiete aller geradzahligten Oberschwingungen ergeben sich aus der Kraftliniengleichung für diese ^{1, 2)}:

$$(21) \quad \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_n} \right) \sin \frac{\pi n y}{2} = \text{Const.}$$

Hier bedeutet n eine ganze gerade Zahl. An Stelle der elliptischen Koordinaten x, y führen wir wieder neue krummlinige Koordinaten u, v durch die Gleichungen:

$$(22) \quad \begin{cases} \sin \omega \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} = u, \\ \cos \omega \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} = v \end{cases}$$

ein. Dann wird:

$$ds^2 = \lambda^2 \pi^2 (x^2 - y^2) \left\{ \frac{n^2 \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{(4x^2 - 1)} (\cos \omega du - \sin \omega dv)^2 + \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 \cdot (1 - y^2)} (\sin \omega du + \cos \omega dv)^2 \right\},$$

oder:

$$ds^2 = \lambda^2 \pi^2 (x^2 - y^2) \left\{ du^2 \left[\frac{\cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 \cos^2 \omega + \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \sin^2 \omega \right] + 2 du dv \left[-\frac{\cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 + \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \right] \cos \omega \cdot \sin \omega + dv^2 \cdot \left[\frac{\cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)} n^2 \sin^2 \omega + \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 (1 - y^2)} \cos^2 \omega \right] \right\}.$$

Analog (20) gilt hier für die Kreisgebiete die einzige Gleichung:

$$(23) \quad \frac{4 \sin^2 \frac{\pi n y}{2}}{\lambda_n^2 \cdot (1 - y^2)} = \frac{n^2 \cos^2 \frac{\pi n y}{2}}{4(x^2 - 1)}.$$

1) M. Abraham, l. c.

2) F. Haack, l. c.

Den Gleichungen (20a) und (20b) entsprechen hier:

$$(23a) \quad \cotg \frac{\pi n y}{2} = \pm \frac{4}{n \cdot \lambda_n} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}},$$

oder da $\lambda_n = 4/n$ ist:

$$(23b) \quad \cotg \frac{\pi n y}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}}.$$

Diese Kreispunktskurven sind in Fig. 7 in elliptischen Koordinaten x, y für die Werte $n = 2$ und $n = 4$ dargestellt. Die Kurve für die 1. Oberschwingung $n = 2$ besteht aus 2 Ästen, die mit einer Spitze im Punkte

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,5 \end{pmatrix}$$

auf der Erregerachse aufsitzen. Ein Ast verläuft parallel zur Kreispunktskurve der Grundschiwingung und zu denjenigen Ästen der ungeradzahigen Oberschwingungen, die sich asymptotisch der Erregerachse nähern. Von der Kreispunktskurve der Grundschiwingung aus folgen die anderen Kurven wirklicher Kreispunkte auf die Erregerachse zu in der Reihenfolge der ganzen Zahlen 1, 2, 3 . . . Der 2. Ast der 1. Oberschwingung schließt sich asymptotisch an die Äquatorebene an.

Die Kreispunktskurve für die 3. Oberschwingung $n = 4$ besteht aus 4 Ästen, die Spitzen auf dem Erreger an den Schwingungsbäuchen

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,25 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0,75 \end{pmatrix}$$

besitzen. Ein Ast verläuft parallel zur Grundschiwingung, 2 Äste nähern sich mit entgegengesetzten Schwingungsphasen asymptotisch der Hyperbel $y = 0,5$ der Knotenpunkte, die als Schnittkurve der Meridianebene mit dem zweischaligen Umdrehungshyperboloid das elektromagnetische Feld zusammen mit der Äquatorebene in 4 Schwingungsräume teilt. Der 4. Ast endlich verläuft asymptotisch zur Äquatorebene.

Für irgendeine geradzahige Oberschwingung n bilden sich n Äste der Kreispunktskurve aus, die mit Spitzen in den Schwingungsbäuchen auf der Erregerachse an den Stellen

$$\left(\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{v-1}{n} \end{array} \right) \quad (v = 2, 4, \dots, n)$$

aufsitzen. Einer der beiden von dem Punkte

$$\left(\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{n-1}{n} \end{array} \right)$$

ausgehenden Äste verläuft parallel zur Erregerachse ins Unendliche, und einer der beiden von dem Punkte

$$\left(\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{n} \end{array} \right)$$

ausgehenden Äste verläuft asymptotisch zur Äquatorebene. Die übrigen $n-2$ Äste gehen immer paarweise von Punkten entgegengesetzter Schwingungsphase, von den Schwingungsbäuchen, aus und nähern sich immer paarweise asymptotisch den Knotenlinien

$$y = \frac{v}{n} \quad (v = 2, 4, 6 \dots (n-2)).$$

In der Nähe des Abrahamschen Erregers tritt durch die Schnittpunkte der verschiedenen Kreispunktskurven eine Häufung der Kreispunkte der Schwingungen aller Ordnungszahlen ein, so daß auch hier wie im Unendlichen eine gewisse Übereinstimmung zwischen dem Hertzschen und Abrahamschen Erreger besteht. Dies Ergebnis bestätigt wieder die Annahme, daß die wirklichen, experimentellen Ergebnisse in der Mitte liegen zwischen den Schlußfolgerungen aus dem Hertzschen und Abrahamschen Erreger.

§ 6.

Eine dem § 1 analoge Betrachtungsweise ergibt für den Abrahamschen Erreger eine Bestätigung der in § 5 gefundenen Kreispunktskurven. In der oben zitierten Abhandlung von Abraham¹⁾ sind für die beiden elektrischen Kraftkomponenten X und Y , die in Richtung der wachsenden x bzw. y verlaufen, also längs den Hyperbeln $y = \text{konst.}$ und den Ellipsen $x = \text{konst.}$, folgende Ausdrücke aufgestellt:

1) M. Abraham, l. c.

$$(24) \quad \begin{cases} X = -e^{-p_n c t} \cdot \frac{1}{p_n} \cdot \frac{E_n'(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{\bar{H}_n(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ Y = e^{-p_n c t} \cdot \frac{1}{p_n} \cdot \frac{E_n(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{\bar{H}_n'(x)}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{cases}$$

Ist der Erreger ein dünner Stab, so ist:

$$(25) \quad \begin{cases} p_n = -\frac{\pi i n}{2} \text{ und } \lambda_n = \frac{4}{n}, \\ E_n(y) = \frac{2 E_n'(1)}{p_n^2 \cdot e_n} \cdot \frac{\pi n y}{2} \text{ für ungeradzahliges } n, \\ E_n(y) = \frac{2 E_n'(1)}{p_n^2 \cdot e_n} \sin \frac{\pi n y}{2} \text{ für geradzahliges } n, \\ \bar{H}_n(x) = \frac{E_n'(1)}{p_n^2 \cdot e_n} \cdot e^{p_n \cdot x}. \end{cases}$$

Folglich nehmen X und Y für ungeradzahliges n die Form an:

$$X = e^{-p_n c t} \cdot \frac{1}{p_n} \cdot \frac{2 E_n'(1)}{p_n^2 \cdot e_n} \cdot \frac{\pi n \sin \frac{\pi n y}{2}}{2 \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{E_n'(1) \cdot e^{p_n \cdot x}}{p_n^2 \cdot e_n \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$Y = e^{-p_n c t} \cdot \frac{1}{p_n} \cdot \frac{2 E_n'(1)}{p_n^2 \cdot e_n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi n y}{2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{E_n'(1) \cdot e^{p_n \cdot x}}{p_n \cdot e_n \sqrt{1 - y^2}}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{2(E_n'(1))^2}{p_n^4 \cdot e_n^2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = A$$

und erhalten:

$$(26) \quad \begin{cases} X = \frac{A \cdot \frac{\pi n}{2}}{p_n \sqrt{x^2 - 1}} \cdot e^{p_n(x - ct)} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2}, \\ Y = \frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot e^{p_n(x - ct)} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2}, \end{cases}$$

n ist eine ungerade ganze Zahl. Wir führen nach (25)

$$p_n = -\frac{\pi i n}{2}$$

in (26) ein, trennen Reelles und Imaginäres und erhalten 2 Wertepaare für die elektrischen Komponenten:

$$(27) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} \sin \frac{\pi n}{2} (x - ct), \\ Y_1 = \frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} \cos \frac{\pi n}{2} (x - ct), \\ X_2 = \frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} \cos \frac{\pi n}{2} (x - ct), \\ Y_2 = \frac{-A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} \sin \frac{\pi n}{2} (x - ct). \end{cases}$$

Für die Kreispunkte fordern wir wieder Gleichheit der Amplituden und eine Phasendifferenz $\pi/2$. Die letzte Bedingung ist in jeder der beiden unter (27) dargestellten Kräfteverteilungen ohne weiteres erfüllt. Gleichheit der Amplituden besteht für X_1, Y_1 , wenn:

$$\frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \sin \frac{\pi n y}{2} = \frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cos \frac{\pi n y}{2},$$

für X_2, Y_2 , wenn:

$$\frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \sin \frac{\pi n y}{2} = \frac{-A}{\sqrt{1 - y^2}} \cos \frac{\pi n y}{2}.$$

Beide Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi n y}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}}.$$

Diese Kreispunktsbedingung ist aber genau die gleiche wie die unter (20b).

Ist n eine gerade ganze Zahl, so lautet die eben durchgeführte Rechnung:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{A \frac{\pi n}{2}}{p_n \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{e}{i}^{p_n(x-ct)} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2}, \\ Y &= \frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \frac{e}{i}^{p_n(x-ct)} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2}. \end{aligned}$$

Wir trennen Reelles und Imaginäres und erhalten:

$$(27a) \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} \cos \frac{\pi n}{2} (x - ct), \\ Y_1 = -\frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} \sin \frac{\pi n}{2} (x - ct), \end{cases}$$

$$(27a) \quad \begin{cases} X_2 = \frac{A}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \cos \frac{\pi n y}{2} \sin \frac{\pi n}{2} (x - ct), \\ Y_2 = -\frac{A}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \sin \frac{\pi n y}{2} \cos \frac{\pi n}{2} (x - ct). \end{cases}$$

Auch hier ist die Phasenbedingung der Kreisgebiete ohne weiteres erfüllt; die Amplitudengleichheit liefert die Gleichung:

$$\cotg \frac{\pi n y}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}}.$$

Diese Kreispunktsbedingung für die geradzahigen Oberschwingungen ist aber genau die gleiche wie die unter (23b).

Eine dem § 4 entsprechende Darstellungsweise für die longitudinale und transversale Kraftkomponente des Erregers braucht für den Abrahamschen Erreger nicht durchgeführt zu werden, denn die Komponenten X und Y , die in Richtung der wachsenden x bzw. y , d. h. längs den Hyperbeln $y = \text{konst.}$ bzw. Ellipsen $x = \text{konst.}$ verlaufen, gehen für große Entfernungen in die longitudinale und transversale Komponente über. In großer Entfernung bleibt daher auch nur die transversale Komponente Y übrig.

Hierin stimmt der Abrahamsche mit dem Hertzschen Erreger überein. Auch der Bau der Formeln der übrigbleibenden transversalen Komponenten ist für beide Erreger in großen Entfernungen ungefähr derselbe. Nach (13) wird \mathcal{E}_t für großes r :

$$\mathcal{E}_t = \frac{e_0 l \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2}}{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

Für den Abrahamschen Erreger wird in großer Entfernung $x = r$ und $y = \cos \vartheta$; die transversale elektrische Kraft Y wird durch den reellen Teil von

$$\frac{e^{p_n(x-ct)}}{x} \cdot \frac{\mathcal{E}_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}$$

bestimmt.¹⁾ In erster Annäherung ist daher Y für die Grundschwingung proportional zu:

$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} \cdot \frac{l}{r} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

1) M. Abraham, l. c.

Der erste Faktor dieses Ausdrucks nähert sich für die Grenze $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$ dem Grenzwert $\pi/2 \cdot \sin \vartheta$, so daß der ganze Ausdruck bis auf einen konstanten Faktor für die Werte $\vartheta = 0^\circ$ und 90° mit der obigen Formel für \mathcal{E}_i übereinstimmt.

Für alle Winkel ϑ zwischen 0° und 90° ist der Verlauf der Funktionen $\sin \vartheta$ und

$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta}$$

zwar sehr ähnlich, aber nicht vollkommen übereinstimmend, denn die Werte von $\sin \vartheta$ sind immer etwas größer als diejenigen von

$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta}.$$

Die vollkommene Übereinstimmung der transversalen Komponenten für beide Erreger in großen Entfernungen dürfte erst bei höherer Annäherung an den Wert von Y zu erreichen sein.

Der aus den Figg. 4 u. 7 ersichtliche übereinstimmende Verlauf der Kreispunktskurven des Hertzschen Erregers und der Grundschiwingung des Abrahamschen Erregers ist, da diese Kurven nahe der Erregerachse verlaufen, sich also dem Werte $\vartheta = 0$ nähern, hiermit auch durch Rechnung bestätigt worden.

§ 7.

Wir fassen das Ergebnis unserer Untersuchungen in folgende Sätze zusammen:

1. Im Felde des Hertzschen Oszillators kommen an keiner Stelle exakt ausgeprägte Kreisschwingungen der elektrischen Kraft vor.
2. In ungefähr 2,5 m Entfernung von der Erregerachse zieht sich parallel zu dieser Achse ein streifenförmiges Gebiet von ungefähr 3 m Breite hin, innerhalb dessen die elliptischen Kraftschwingungen des Hertzschen Oszillators angenähert als Kreisschwingungen angesehen werden können.

3. Im Felde des stabförmigen Abrahamschen Erregers kommen wirkliche Kreispunkte vor, und zwar liegen diese Kreispunkte in einer Linie, die sich in ähnlicher Weise wie der Streifen beim Hertzschen Erreger parallel der Erregerachse hinzieht. Außerdem verlaufen für die Oberschwingungen Kreispunktskurven asymptotisch zu den entsprechenden Knotenlinien. In großer Entfernung besteht hinsichtlich der Kreisschwingungen vollkommene Übereinstimmung zwischen dem Hertzschen und Abrahamschen Erreger.

Zum Schluß möchte ich es nicht versäumen, Herrn Professor Dr. König auch an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für das Interesse an ihrer Durchführung meinen allerherzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 16. Oktober 1916.)

Ist dann

$$(4) \quad A_i = a_1 \beta_{i1} + a_2 \beta_{i2} + \dots + a_n \beta_{in},$$

so findet man:

$$(5) \quad \dim H = (y_1^{A_1} y_2^{A_2} \dots y_n^{A_n}),$$

$$H = \frac{h}{b_1^{A_1} b_2^{A_2} \dots b_n^{A_n}} (y_1^{A_1} y_2^{A_2} \dots y_n^{A_n}).$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Einheiten $y_1 y_2 \dots y_n$ auch wirklich die Einheiten $x_1 x_2 \dots x_n$ vertreten können, ist die, daß zwischen den Größen $y_1 y_2 \dots y_n$ der Gleichungen (I) keine Gleichungen bestehen, die von $x_1 x_2 \dots x_n$ unabhängig sind; das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante D von Null verschieden ist.

Setzt man

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{D},$$

und ist ε_{in} die Adjunkte von β_{in} in ε , so hat man:

$$(6) \quad a_{in} = \frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon} = D \varepsilon_{in}.$$

Endlich folgt noch aus (4):

$$(4a) \quad a_i = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \dots + A_n a_{in}.$$

Wir wollen uns nun zu dem Falle $n=4$ wenden, und zwar zu dem fundamentalen Einheitensysteme (gr cm sec ϑ) und

$$x_1 = 1 \text{ gr}, x_2 = 1 \text{ cm}, x_3 = 1 \text{ sec}, x_4 = \vartheta 1^\circ \text{ Celsius}$$

setzen, dabei aber annehmen, die alte Einheit $x_4 = \vartheta$ komme auch in dem neuen Einheitensysteme vor, und die drei übrigen Einheiten des letzteren seien von x_4 unabhängig. Unter diesen Voraussetzungen hat man:

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 = b_1 (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} x_3^{a_{13}}), \\ y_2 = b_2 (x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{23}}), \\ y_3 = b_3 (x_1^{a_{31}} x_2^{a_{32}} x_3^{a_{33}}); \\ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Adjunkten $a_{11} a_{22} \dots a_{33}$ beziehen sich auf diese Determinante, und die übrigen besitzen die Werte:

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0, \quad a_{44} = D.$$

Ferner ist

$$(8) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 \beta_{11} + a_2 \beta_{12} + a_3 \beta_{13}, \\ A_2 = a_1 \beta_{21} + a_2 \beta_{22} + a_3 \beta_{23}, \\ A_3 = a_1 \beta_{31} + a_2 \beta_{32} + a_3 \beta_{33}, \quad A_4 = a_4. \end{cases}$$

Die obigen allgemeinen Formeln (II) und (5) gehen endlich in folgende über:

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = 1 \text{ (gr)} = \frac{1}{b_1^{\beta_{11}} b_2^{\beta_{21}} b_3^{\beta_{31}}} (y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{21}} y_3^{\beta_{31}}), \\ x_2 = 1 \text{ (cm)} = \frac{1}{b_1^{\beta_{12}} b_2^{\beta_{22}} b_3^{\beta_{32}}} (y_1^{\beta_{12}} y_2^{\beta_{22}} y_3^{\beta_{32}}), \\ x_3 = 1 \text{ (sec)} = \frac{1}{b_1^{\beta_{13}} b_2^{\beta_{23}} b_3^{\beta_{33}}} (y_1^{\beta_{13}} y_2^{\beta_{23}} y_3^{\beta_{33}}); \end{cases}$$

$$(10) \quad H = h(\text{gr}^{a_1} \text{cm}^{a_2} \text{sec}^{a_3} \vartheta^{a_4}) = \frac{h}{b_1^{A_1} b_2^{A_2} b_3^{A_3}} (y_1^{A_1} y_2^{A_2} y_3^{A_3} \vartheta^{A_4}).$$

Im folgenden Paragraphen wollen wir einige Systeme $(y_1 y_2 y_3 \vartheta)$ betrachten, die auch heute noch neben dem fundamentalen System $(\text{gr cm sec } \vartheta)$ benutzt werden.

§ 2.

Bezeichnet man mit V das Volumen einer Gasmasse m bei dem Druck p und der absoluten Temperatur T , so ist

$$(11) \quad v_s = \frac{V}{m} (\text{gr}^{-1} \text{cm}^3) = v (\text{gr}^{-1} \text{cm}^3)$$

das spezifische Volumen,

$$(12) \quad v = v (\text{cm}^3),$$

das Volumen der Masseneinheit 1 (gr) des Gases bei dem Druck p und der Temperatur T .

Die Größen v_s^0 , v_0 und v_0 mögen den Werten

$$(13) \quad p = 1 \text{ Atm.} = a (\text{gr cm}^{-1} \text{sec}^{-2}),$$

wo

$$a = 1013650$$

ist,

$$T = 273 (\vartheta) = 0^{\circ} \text{ Celsius}$$

entsprechen, so daß

$$(14) \quad v_1^0 = v_0 (\text{gr}^{-1} \text{cm}^3), \quad v_0 = v_0 (\text{cm}^3).$$

Wir wollen uns nun zuerst mit den beiden Systemen

$$(\text{Atm. } v_1^0 \text{ sec } \vartheta) \quad \text{und} \quad (\text{Atm. } v_0 \text{ sec } \vartheta)$$

beschäftigen; wir haben also für das erstere zu setzen

$$y_1 = a (\text{gr cm}^{-1} \text{sec}^{-2}), \quad y_2 = v_0 (\text{gr}^{-1} \text{cm}^3), \quad y_3 = 1 (\text{sec}), \\ y_4 = 1 (\vartheta),$$

wodurch

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{matrix} \beta_{11} = \frac{3}{2}, & \beta_{12} = \frac{1}{2}, & \beta_{13} = 0, \\ \beta_{21} = \frac{1}{2}, & \beta_{22} = \frac{1}{2}, & \beta_{23} = 0, \\ \beta_{31} = 3, & \beta_{32} = 1, & \beta_{33} = 1 \end{matrix}$$

wird. Hieraus folgt dann:

$$(15) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{2}, & A_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, & A_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \\ \alpha_1 = A_1 - A_2, & \alpha_2 = 3A_2 - A_1, & \alpha_3 = A_3 - 2A_1; \end{cases}$$

$$(15a) \quad \begin{cases} 1 (\text{gr}) = \frac{1}{\alpha^{1/2} v_0^{1/2}} (\text{Atm}^{1/2} v_3^0 \text{ sec}^3), \\ 1 (\text{cm}) = \frac{1}{\alpha^{1/2} v_0^{1/2}} (\text{Atm}^{1/2} v_3^0 \text{ sec}); \\ H = h (\text{gr}^{\alpha_1} \text{cm}^{\alpha_2} \text{sec}^{\alpha_3} \vartheta^{\alpha_4}) = \frac{h}{\alpha^{A_1} v_0^{A_2}} (\text{Atm}^{A_1} v_3^0 \text{ sec}^{A_3} \vartheta^{\alpha_4}). \end{cases}$$

Für das letztere ist

$$y_1 = a (\text{gr cm}^{-1} \text{sec}^{-2}), \quad y_2 = v_0 (\text{cm}^3), \quad y_3 = 1 (\text{sec}), \quad y_4 = 1 (\vartheta);$$

und wir erhalten:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{matrix} \beta_{11} = 1, & \beta_{12} = 0, & \beta_{13} = 0, \\ \beta_{21} = \frac{1}{3}, & \beta_{22} = \frac{1}{3}, & \beta_{23} = 0, \\ \beta_{31} = 2, & \beta_{32} = 0, & \beta_{33} = 1; \end{matrix}$$

so daß

$$(16) \quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1, & A_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3}, & A_3 = 2\alpha_1 + \alpha_3; \\ \alpha_1 = A_1, & \alpha_2 = 3A_2 - A_1, & \alpha_3 = A_3 - 2A_1; \end{cases}$$

$$(16a) \left\{ \begin{aligned} 1(\text{gr}) &= \frac{1}{\alpha v_0^{1/2}} (\text{Atm } v_0^{1/2} \text{ sec}^2), \quad 1(\text{cm}) = \frac{1}{v_0^{1/2}} (v_0^{1/2}); \\ H &= h(\text{gr}^{\alpha_1} \text{ cm}^{\alpha_2} \text{ sec}^{\alpha_3} \vartheta^{\alpha_4}) = \frac{h}{\alpha^{\alpha_1} v_0^{\alpha_2}} (\text{Atm}^{\alpha_1} v_0^{\alpha_2} \text{ sec}^{\alpha_3} \vartheta^{\alpha_4}). \end{aligned} \right.$$

Diese Einheitensysteme werden bei der Berechnung der Konstanten R , a , b , der Zustandsgleichung

$$(17) \quad p = \frac{R T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

von van der Waals benutzt.

Sind \mathfrak{R} , α , \mathfrak{b} die numerischen Werte dieser Konstanten im System $(\text{gr cm sec } \vartheta)$, so ist, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} R_s &= \mathfrak{R}(\text{cm}^2 \text{ sec}^{-2} \vartheta^{-1}) = \mathfrak{R}_1 (\text{Atm } v_0^0 \vartheta^{-1}) \\ &= \frac{\mathfrak{R}}{v_0^{2/5}} (v_0^{2/5} \text{ sec}^{-2} \vartheta^{-1}), \\ a_s &= \alpha (\text{gr}^{-1} \text{ cm}^5 \text{ sec}^{-2}) = \alpha_1 (\text{Atm } v_0^2) \\ &= \frac{\alpha \cdot \alpha}{v_0^{4/5}} (\text{Atm}^{-1} v_0^{4/5} \text{ sec}^{-2}), \\ b_s &= \mathfrak{b}(\text{gr}^{-1} \text{ cm}^3) = \mathfrak{b}_1 (v_0^0) = \frac{\mathfrak{b} \alpha}{v_0^{2/5}} (\text{Atm}^{-1} v_0^{2/5} \text{ sec}^{-2}), \\ v_s &= \mathfrak{v}(\text{gr}^{-1} \text{ cm}^3) = \mathfrak{v}_1 (v_0^0) = \frac{\mathfrak{v} \alpha}{v_0^{2/5}} (\text{Atm}^{-1} v_0^{2/5} \text{ sec}^{-2}), \end{aligned} \right.$$

wo

$$(19) \quad \mathfrak{R}_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\alpha v_0}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha v_0^2}, \quad \mathfrak{b}_1 = \frac{\mathfrak{b}}{v_0}, \quad \mathfrak{v}_1 = \frac{\mathfrak{v}}{v_0}.$$

Setzt man diese Werte von R_s , a_s , b_s , v_s in die Gleichung (17) ein, so erhält man

$$(20) \quad p = \frac{R T}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

wo

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \mathfrak{R}(\text{gr cm}^2 \text{ sec}^{-2} \vartheta^{-1}) = \mathfrak{R}_1 (\text{Atm } v_0 \vartheta^{-1}) \\ &= \frac{\mathfrak{R}}{\alpha^{1/2} v_0^{1/2}} (\text{Atm}^{1/2} v_0^{1/2} \text{ sec}^2 \vartheta^{-1}), \\ a &= \alpha (\text{gr cm}^5 \text{ sec}^{-2}) = \alpha_1 (\text{Atm } v_0^2) = \frac{\alpha}{\alpha^4 v_0^3} (\text{Atm}^4 v_0^3 \text{ sec}^6), \\ b &= \mathfrak{b}(\text{cm}^3) = \mathfrak{b}_1 (v_0) = \frac{\mathfrak{b}}{\alpha^{3/2} v_0^{3/2}} (\text{Atm}^{3/2} v_0^{3/2} \text{ sec}^3), \\ v &= \mathfrak{v}(\text{cm}^3) = \mathfrak{v}_1 (v_0) = \frac{\mathfrak{v}}{\alpha^{3/2} v_0^{3/2}} (\text{Atm}^{3/2} v_0^{3/2} \text{ sec}^3). \end{aligned} \right.$$

Aus (20) folgt, wenn p und \mathfrak{T} die numerischen Werte von p und T sind, die Zahlengleichung

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{T} = \left(p + \frac{a_1}{v_1^2}\right) (v_1 - b_1),$$

die für $\mathfrak{T} = 273$, $p = 1$, also auch $v_1 = 1$, die Form

$$273 \mathfrak{R}_1 = (1 + a_1) (1 - b_1)$$

annimmt.

Mit Hilfe dieser Formeln und bei Benutzung der sorgfältigen Messungen von Andrews hat van der Waals die folgenden Werte von \mathfrak{R}_1 , a_1 , b_1 für Kohlensäure berechnet:

$$\mathfrak{R}_1 = 0,0036865, \quad a_1 = 0,00874, \quad b_1 = 0,0023; \quad v_0 = 505.$$

Man hat also für Kohlensäure:

$$(22) \begin{cases} R = \mathfrak{R}(\text{gr cm}^2 \text{sec}^{-2} \vartheta^{-1}) = 0,0036865 (\text{Atm } v_0 \vartheta^{-1}), \\ a = a(\text{gr cm}^6 \text{sec}^{-2}) = 0,00874 (\text{Atm } v_0^3), \\ b = b(\text{cm}^3) = 0,0023 (v_0); \\ \mathfrak{R} = \alpha v_0 \mathfrak{R}_1 = 1,8871 \cdot 10^6, \quad a = \alpha v_0^2 a_1 = 2,25934 \cdot 10^9, \\ \quad \quad \quad b = v_0 b_1 = 1,1615. \end{cases}$$

Als drittes Beispiel wählen wir das sog. konventionelle System (P met sec ϑ); P ist die Kraft, die die Erde in mittleren Breiten ($g = 981$ [cm sec $^{-2}$]) auf ein Kilogramm ausübt. In diesem Falle ist also

$$y_1 = P = 9,81 \cdot 10^5 (\text{gr cm sec}^{-2}), \quad y_2 = 10^3 (\text{cm}), \quad y_3 = 1 (\text{sec});$$

und, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$(23) \begin{cases} A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2 - a_1, \quad A_3 = a_3 + 2 a_1; \\ a_1 = A_1, \quad a_2 = A_1 + A_2, \quad a_3 = A_3 - 2 A_1; \\ H = h (\text{gr}^{a_1} \text{cm}^{a_2} \text{sec}^{a_3} \vartheta^{a_4}) \\ \quad \quad \quad = \frac{h}{9,81^{a_1} 10^{3a_1 + 2a_2}} (P^{a_1} \text{met}^{a_2 - a_1} \text{sec}^{a_3 + 2a_1} \vartheta^{a_4}), \\ H = h \cdot (P^{A_1} \text{met}^{A_2} \text{sec}^{A_3} \vartheta^{A_4}) \\ \quad \quad \quad = h \cdot 9,81^{A_1} \cdot 10^{5A_1 + 2A_2} (\text{gr}^{A_1} \text{cm}^{A_2 + A_3} \text{sec}^{A_3 - 2A_1} \vartheta^{A_4}). \end{cases}$$

Die Konstanten R , a , b für Kohlensäure, Gleichungen (22), besitzen in dem System (P met sec ϑ) die Werte

$$(24) \quad \begin{cases} R = 1,9236 \cdot 10^{-2} (P \text{ met } \vartheta^{-1}), \\ a = 2,3031 \cdot 10^{-5} (P \text{ met}^4), \\ b = 1,1615 \cdot 10^{-6} (\text{met}^3). \end{cases}$$

Die Zustandsgleichung (17) geht, wenn in ihr $v_3 = V/m$ gesetzt wird, in folgende über

$$p = \frac{m R_s T}{V - m b_s} - \frac{m^2 a_s}{V^2},$$

wo V das Volumen der Masse, $m = \mu$ (gr) des Gases bei dem Druck p und der Temperatur T bedeutet, oder in die Gleichung

$$(25) \quad p = \frac{R_{12} T}{V - b_{12}} - \frac{a_{12}}{V^2},$$

wo

$$\begin{aligned} R_{12} &= m R_s = \mu R, \\ a_{12} &= m^2 a_s = \mu^2 a, \\ b_{12} &= m b_s = \mu b. \end{aligned}$$

Setzt man demnach $\mu = 10^3$, so erhält man die Zustandsgleichung, die von den älteren Physikern, z. B. von Zeuner¹⁾, benutzt worden ist.

Für Kohlensäure hat man

$$\begin{aligned} R_{12} &= 19,236 (P \text{ met } \vartheta^{-1}), \\ a_{12} &= 23,031 (P \text{ met}^4), \\ b_{12} &= 1,1615 \cdot 10^{-3} (\text{met}^3). \end{aligned}$$

1) G. Zeuner, Wärmetheorie. 2. Aufl. p. 105.

(Eingegangen 16. Oktober 1916.)

Berichtigung:

M. B. Weinstein, Ann. d. Phys. 51. p. 469, letzte Zeile, muß es heißen:
 Θ , Θ' $\frac{1}{3}$ Gesamtvolumen der Molekeln.

m

m
ei-

ds-
u-

en:

